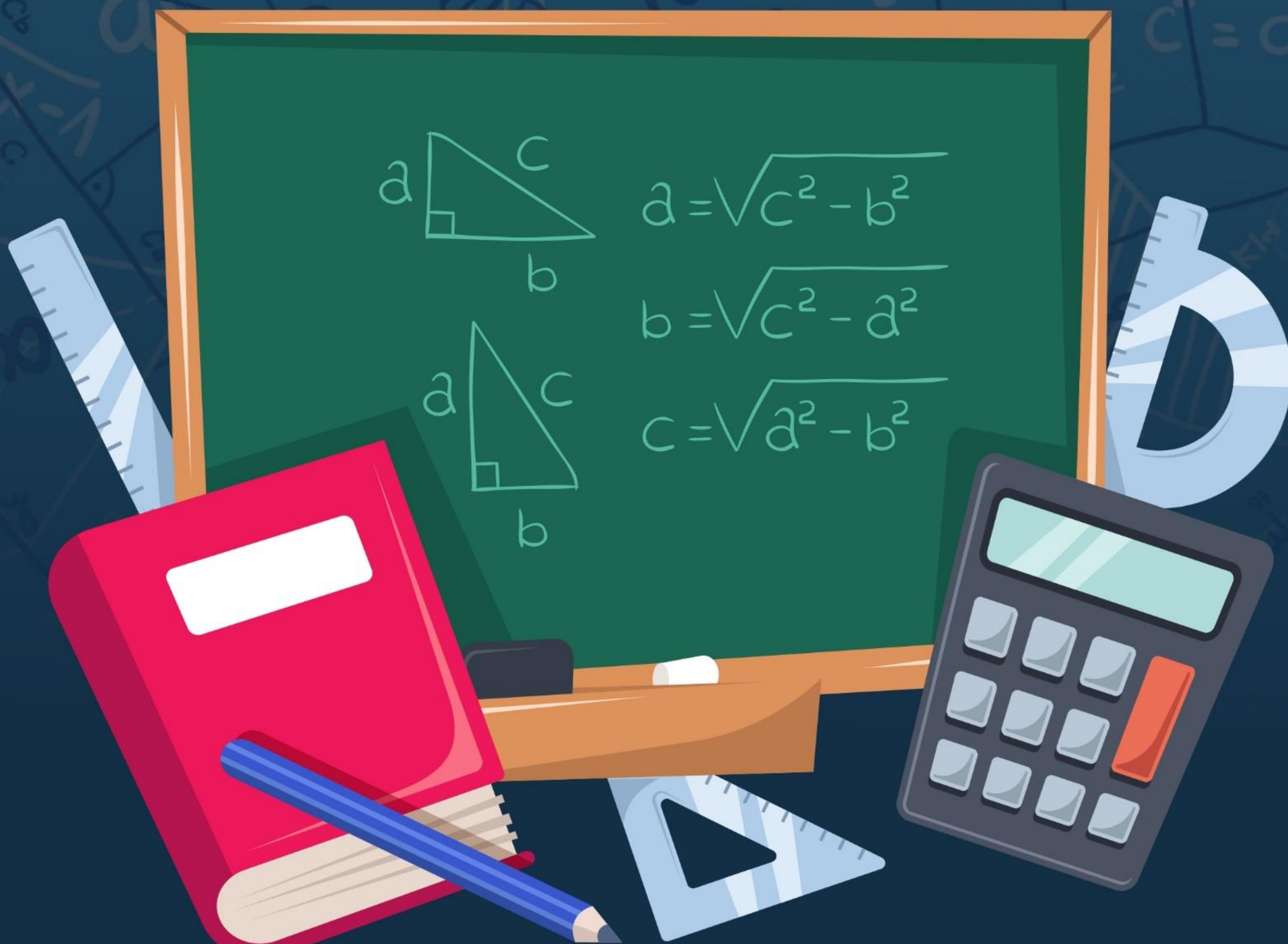
COLEGIO DE
BACHILLERES
DE CHIAPAS

CHIAPAS
GOBIERNO DEL ESTADO

GUÍA DIDÁCTICA
CÁLCULO DIFERENCIAL

QUINTO SEMESTRE



Presentación

La asignatura de **Cálculo Diferencial** tiene como propósito general el desarrollo de habilidades características del pensamiento lógico-matemático, por medio del uso de los procedimientos para derivar y su aplicación en problemas de optimización que le permitan predecir situaciones reales, formales o hipotéticas de su contexto, logrando entender e interpretar los resultados en diversos ámbitos colaborando a desarrollar su capacidad de razonamiento, así como su toma de decisiones.

Esta guía parte de la solución de límites en el bloque 1, así como Derivadas durante el bloque 2, lo que le permitirá al estudiantado, en el bloque 3, una comprensión de las razones de cambio en diversos fenómenos de su entorno además de poder analizarlos de forma cualitativa y cuantitativa. Lo anterior, para propiciar un desarrollo en capacidades de abstracción y razonamiento mediante la aplicación de la Derivada, tema que le será de utilidad en estudios de nivel superior.

Al tratarse de una asignatura de Componente Propedéutico del Bachillerato General tiene como intención brindarle las herramientas y conocimientos básicos al estudiantado para que pueda continuar sus estudios a nivel superior además de permitirle su integración en forma eficiente a las circunstancias de vida y situación tanto académica como laboral en su entorno; favoreciendo al estudiantado respecto a un interés vocacional enfocado en el Campo de las Matemáticas.

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS
DIRECCIÓN ACADÉMICA
SUBDIRECCIÓN DE DESARROLLO ACADÉMICO
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN Y SEGUIMIENTO A LA ACADEMIA

Directorio

Dra. Nancy Leticia Hernández Reyes

Directora General

Ing. Luis Alberto Hernández Zambrano

Director Académico

Mtra. María Eunice López Antonio

Subdirectora de Desarrollo Académico

Dr. Raúl Neftalí Vázquez Escobar

Jefe del Departamento de Formación y Seguimiento a la Academia

Colegiado para el desarrollo de la guía

Mtra. Adriana del Carmen López Valencia
CEMSaD 294 El Jardín

Dra. Blanca Aurora Galdámez Hernández
CEMSaD 212 El Pozo

Ing. Javier Ramón Martínez Hernández
Plantel 134 San Cayetano

Colaboración especial:
Ing. Flor Alicia Gómez González
Adscrita al Depto. de Formación y Seguimiento a la Academia

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; abril 2021

Índice

Contenido

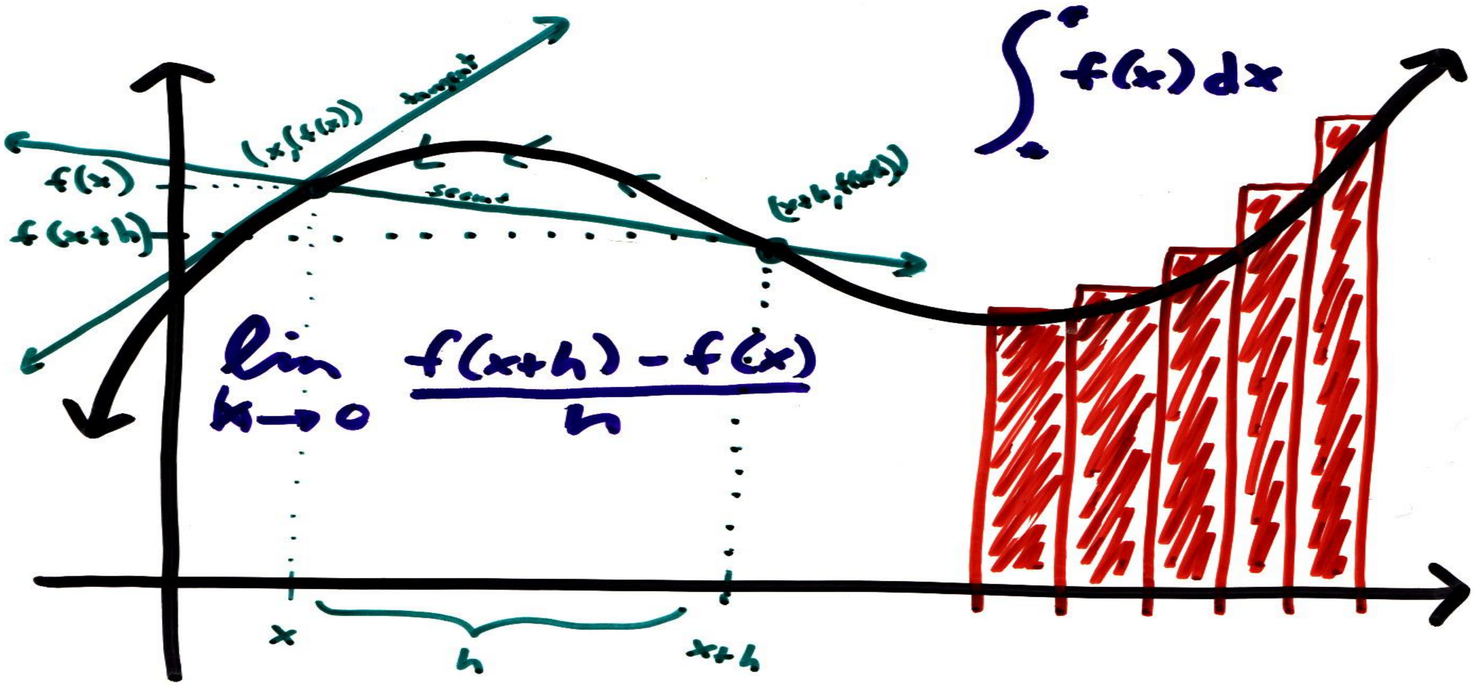
COMPETENCIAS GENÉRICAS	CLAVE
Se auto determina y cuida de sí.	
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	
1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	CG1.1
1.2 Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.	CG1.2
1.3 Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.	CG1.3
1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.	CG1.4
1.5 Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.	CG1.5
1.6 Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.	CG1.6
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	
2.1 Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.	CG2.1
2.2 Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	CG2.2
2.3 Participa en prácticas relacionadas con el arte.	CG2.3
3. Elige y practica estilos de vida saludables.	
3.1 Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.	CG3.1
3.2 Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.	CG3.2
3.3 Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.	CG3.3
Se expresa y comunica.	
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	
4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.	CG4.1
4.2 Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	CG4.2
4.3 Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	CG4.3
4.4 Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.	CG4.4
4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.	CG4.5

Piensa crítica y reflexivamente.	
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	
5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	CG5.1
5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	CG5.2
5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	CG5.3
5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	CG5.4
5.5 Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	CG5.5
5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	CG5.6
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	
6.1 Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	CG6.1
6.2 Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	CG6.2
6.3 Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.	CG6.3
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	CG6.4
Aprende de forma autónoma.	
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	
7.1 Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.	CG7.1
7.2 Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	CG7.2
7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	CG7.3
Trabaja en forma colaborativa.	
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	
8.1 Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	CG8.1
8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	CG8.2
8.3 Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	CG8.3

Participa con responsabilidad en la sociedad.	
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.	
9.1 Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.	CG9.1
9.2 Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.	CG9.2
9.3 Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.	CG9.3
9.4 Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.	CG9.4
9.5 Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.	CG9.5
9.6 Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.	CG9.6
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	
10.1 Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.	CG10.1
10.2 Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	CG10.2
10.3 Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	CG10.3
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	
11.1 Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.	CG11.1
11.2 Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.	CG11.2
11.3 Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.	CG11.3

COMPETENCIAS DISCIPLINARES EXTENDIDAS	CLAVE
MATEMÁTICAS	
Las competencias disciplinares extendidas para este campo del conocimiento corresponden a las competencias disciplinares básicas previstas en el artículo 7 del Acuerdo 444, y son las siguientes:	
1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	CDEM1
2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.	CDEM2
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	CDEM3
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	CDEM4
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	CDEM5
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	CDEM6
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.	CDEM7
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	CDEM8

Bloque I: Límites



Bloque I: Límites

Emplea de manera crítica y reflexiva el concepto de Límite en la solución de situaciones de su entorno, reconociendo su importancia en la construcción de conocimientos.

Noción de límite:

Los límites describen cómo se comporta una función cerca de un punto, en vez de en ese punto. Esta simple pero poderosa idea es la base de todo el cálculo.

Estructura conceptual de la idea de límite de una función en un punto

En la estructura conceptual de la idea de límite consideramos dos campos: conceptual y procedimental. Estos campos nos permiten identificar los conceptos y procedimientos más relevantes del tema y las relaciones entre ellos. Campo conceptual: en el campo conceptual identificamos los hechos, los conceptos y las estructuras relacionadas con la idea de límite. En los hechos involucramos términos, notaciones, convenios y resultados. En los términos identificamos límite, infinito, función, tender a un punto, sucesión, asíntotas, límites de una función, límite de una función en un punto, indeterminaciones, plano cartesiano, continuidad y número irracional. En las notaciones consideramos límite de una función, infinito (∞), notación de función $f(x)$ o sucesión.
Partimos de la idea intuitiva de límite de una función y consideramos las aproximaciones o acercamientos de imágenes y pre imágenes a un punto.

Antecedentes y aplicaciones del cálculo

Newton y **Leibniz** son considerados los descubridores del cálculo, pero su labor es el resultado de una ardua tarea iniciada muchos siglos antes. Ellos tomaron los *procedimientos infinitesimales* de sus antecesores (Barrow y Fermat) y les dieron la unidad algorítmica y la precisión y generalidad que se requería por ser un método novedoso, con lo que impulsaron su desarrollo. Tales estudios pudieron ser elaborados gracias a hombres y visionarios como Torricelli, Cavalieri y Galileo, así como Kepler, Valerio y Stevin. Los alcances que estos hombres lograron con las operaciones iniciales con infinitesimales fueron a su vez resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente, el trabajo de estos últimos tiene su base en problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones fundamentales y decisivas fue la *Geometría analítica* desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no hubiera tenido el desarrollo que hoy conocemos. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del Siglo *XVII*. Los nuevos métodos enfatizaron el trabajo empírico y la descripción matemática de nuestra *relación con la realidad.* La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos *V* y *XV.* Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento fueron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron con el Renacimiento y la Reforma Protestante (durante los siglos *XV* y XVI*).* Así, el ***Cálculo diferencial e integral*** está inmerso en el tipo de conocimiento, cultura y sociedad de las que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos *XVIII, XIX y XX*, se lo debemos al *Cálculo infinitesimal* y por eso se le considera como una de las riquezas de la creación intelectual de la que el hombre debe sentirse orgulloso.

Contribuyentes al desarrollo del cálculo

1600 — **1700** — **1800**

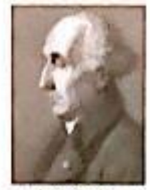

Arquímides (287 a 212 a.C.)


Descartes (1596-1650)


Newton (1642-1727)


Leibniz (1646-1716)


L. Euler (1707-1783)


Lagrange (1736-1813)


Kepler (1571-1630)


Pascal (1623-1662)


L'Hopital (1661-1704)


Bernoulli (1667-1748)


M. Agnesi (1718-1799)

1609	1637	1665	1696	1728	1756	1799
Leyes de Kepler del movimiento	Geometría analítica de Descartes	Newton descubre el cálculo	Primer texto de cálculo *L'Hopital*	Euler introduce el número e	Lagrange comienza su *mécanique analytique*	Gauss y su teorema fundamental del álgebra

1800 — **1900**


C. Gauss (1777-1855)


A. Cauchy (1789-1857)


G. Riemann (1826-1866)


H. Lebesgue (1875-1941)


K. Weierstrass (1815-1897)


S. Kovalevsky (1850-1891)


J. Gibbs (1839-1903)

1821	1854	1873	1902
Cauchy y su noción precisa de limite	Integral de Reimann	Hermite e es trascendental	Integral de Lebesgue

Actividades de aprendizaje:

Analiza los videos alojados en: https://youtu.be/eCB_Jr_VKyg

https://youtu.be/fOIPCSpCNVA

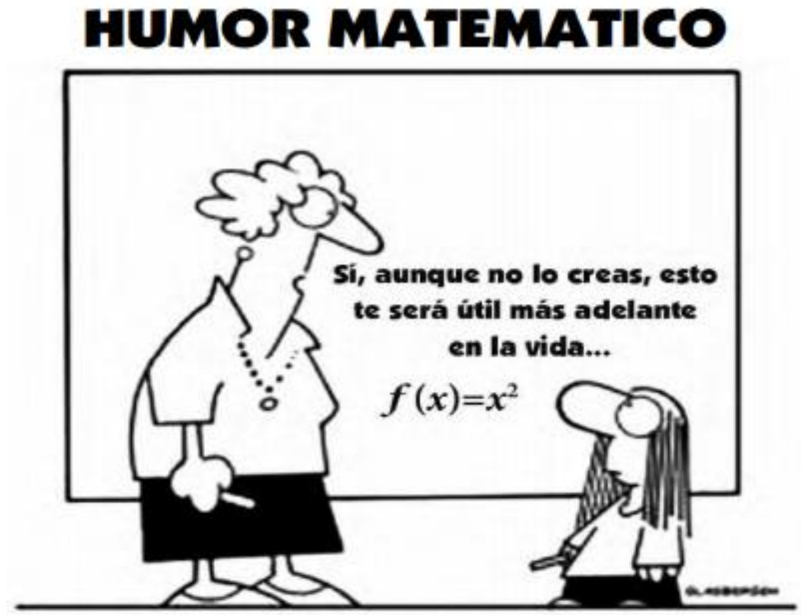
Comprueba tus saberes

A partir de esta actividad comenzarás a construir tu portafolio de evidencias, por lo que te sugiero elabores los ejercicios en hojas blancas; las cuales te la solicitará el docente en el momento que así crea conveniente.

1. ¿A partir de qué concepción teórica construyó Newton el Cálculo?
2. ¿A partir de qué concepción teórica construyó Leibniz el Cálculo?
3. ¿Cuáles fueron las principales aportaciones de Newton al cálculo?
4. ¿Cuáles fueron las principales aportaciones de Leibniz al cálculo?
5. En un recipiente con forma de un cilindro recto, ¿cómo se puede determinar que su volumen sea máximo?

Límites

Sea la



función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Graficando la función se puede observar que el dominio contiene todos los números reales excepto x=*1* ya que para este valor de x la función está indefinida. La gráfica de la función es la recta *y* = x + *1* menos un punto *(1,2)*. La ausencia de este punto se muestra como un "agujero". Aunque *f (1)* no está definida, está claro que podemos hacer el valor de *f (x)* tan cercano como queramos a 2, eligiendo valores de x suficientemente cerca de 1, es decir, no nos interesa hallar el valor de *f (x)*, puesto que *f (x)* no está definida en x=1; lo que se busca es el valor al que se acerca *f(x)* cuando x lo hace a 1.

Se determina *f (x)*, considerando valores de x próximos a 1, es decir, al aproximarse por la izquierda, tenemos los siguientes valores 0.5, 0.75, 0.9, 0.99 y 0.999; por la derecha

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	→1←	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	→?←	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5

tenemos: 1.5, 1.25, 1.1, 1.01, y 1.001

Decimos que *f (x)* está arbitrariamente cercano a 2 conforme x se aproxima a1 o, simplemente, que *f (x)* se aproxima al límite 2 cuando x se aproxima a 1. Escribimos esto como:

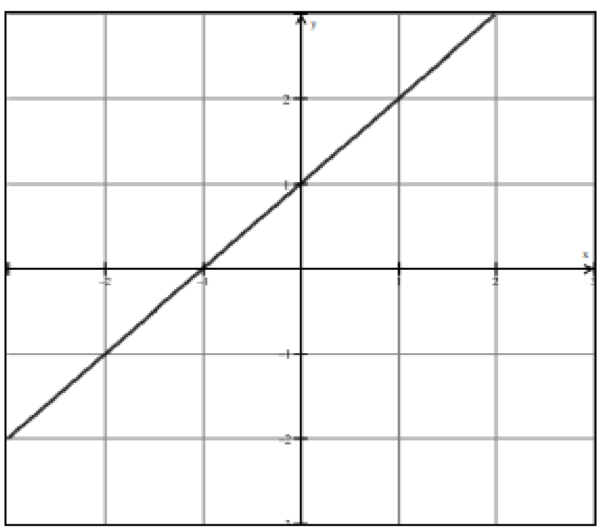
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \qquad \text{ó} \qquad f(x)x \to 1 = \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Definición:

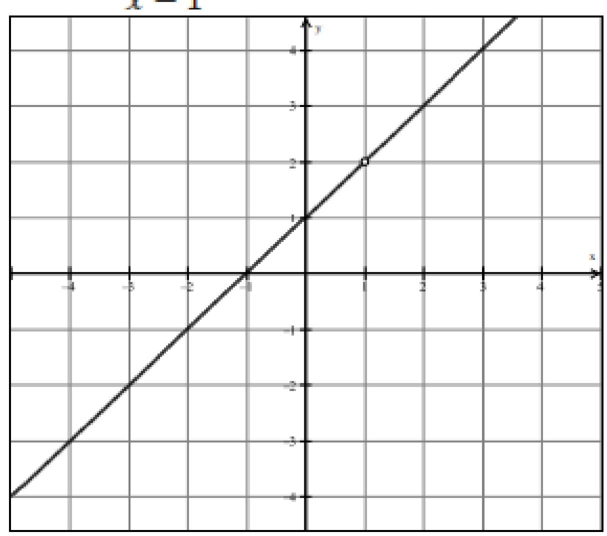
El límite de una función *f (x)*, cuando x → *a* es el valor de la función cuando se toman valores sucesivos de x, cada vez más cercanos a "a", por la derecha y por la izquierda que resulta ser la ordenada del punto de abscisa "a" exista o no en la gráfica el punto *(a, f (a))* "con la función equivalente".

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$f(x) = x + 1$

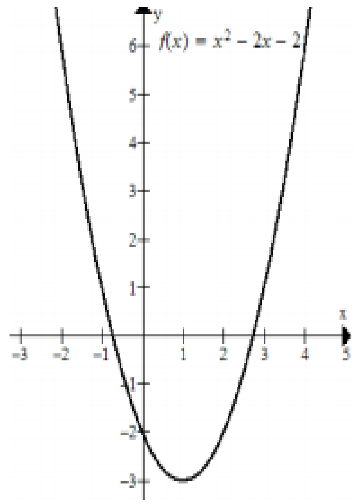


$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$



La gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es idéntica a la recta $y = x + 1$, excepto en $x = 1$, donde la función no está definida.

Ejemplo 1. Dada la función *f (x)*= $x^2 - 2x - 2$ determina lim *f* $_{x\to 3}$*(x)* La gráfica de la función dada nos queda de la siguiente manera:



Después de elaborar la gráfica, podemos dibujar una tabla para analizar los valores de *f (x)* cuando x se acerca a 3:

Izquierda Derecha

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	0.61	0.96	0.996	0.9996	?	1.0004	1.004	1.04	1.41

Observando la gráfica y la tabla tenemos que cuando x se acerca a 3 por la izquierda y por la derecha f (x) se aproxima a 1, esto es,

$$lim_{x\to 3-}\, f(x) = 1$$

$$lim_{x\to 3+}\, f(x) = 1$$

Por lo tanto:

$$lim_{x\to 3}\, f(x) = 1$$

Ejemplo 2. Encuentre el $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

Solución. Note que $(x^2-x-6)/(x-3)$ no está definido para x=3, pero todo está bien. Para tener idea de lo que sucede cuando x tiende a 3 se puede usar una calculadora para evaluar la expresión dada; por ejemplo, para 3.1, 3.01, 3.001, etc. Pero es mucho mejor usar un poco de álgebra para simplificar el problema.

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = (x+2) = 3+2 = 5$$

La cancelación de x-3 en el segundo paso es legítima, ya que la definición pasa por alto el comportamiento preciso de x=3. Por lo tanto, no se ha dividido entre cero.

Comprueba tus saberes

Elabora los ejercicios en hojas blancas e intégralos a tu portafolio de evidencias los que te solicitara el docente en el momento que así crea conveniente.

Encontrar los siguientes límites:

1. $(2x-8)$ Respuesta: -2

2. $\left(\frac{2}{x}+1\right)$

3. $(x^2 - 3x + 1)$ Respuesta: 11

4. $\frac{\sqrt{9+x^2}}{x-3}$

5. $\frac{x^2+3x-4}{x-1}$ Respuesta: 5

6. $\sqrt[3]{5x+7}$

7. $\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{5}}{1-x}$

8. $\frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2-2x}$ Respuesta: -1/3

Calcule el límite por la derecha de la siguiente función: $f(x) = 2x^2 + 3$

Calcule el siguiente límite, obteniendo sus límites laterales:

$\frac{|x|}{x}$ Respuesta: -1

Propiedades de los límites

Las **propiedades de los límites** son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina **álgebra de los límites**.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones definidas en un mismo intervalo en donde está el valor *a* del límite y *k* una constante.

- **Unicidad del límite**: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

- **Propiedad de la suma**: el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la resta**: el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad del producto**: el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la función constante**: el límite de una función constante es esta misma constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

- **Propiedad del factor constante**: en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

- **Propiedad del cociente**: el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \;;$$

$$\text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

- **Propiedad de la función potencial**: el límite de una función potencial es la potencia del límite de la base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

- **Propiedad de la función exponencial**: el límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente:

$$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la función potencial exponencial**: el límite de una función potencial exponencial, es la potencia de los límites de las dos funciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la raíz**: el límite de una raíz, es la raíz del límite:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\text{si el índice } n \text{ es par, debe ser } \lim_{x\to a} f(x) > 0$$

- **Propiedad de la función logarítmica**: el límite del logaritmo es el logaritmo el límite.

$$\lim_{x \to a} [log_k f(x)] = log_k \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$$

Ejemplos:

1. **Límite de una función constante:**

El límite cuando **x → a**; de una función constante **f (x) = k** es igual a **k** ; Simbólicamente: $\lim_{x \to a} k = k$

EJEMPLO: el límite cuando **x → 2** ; de **f (x) = 5** es : $\lim_{x \to 2} 5 = 5$

2. **LÍMITE DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD:**

El límite cuando **x → a**; de la función identidad **f (x) = x** es igual a **a**; Simbólicamente: $\lim_{x \to a} x = a$

EJEMPLO: El límite cuando x → 0; de f(x) = x es: $\lim_{x \to 0} x = 0$

3. **LÍMITE DE UNA SUMA DE FUNCIONES:**

El límite cuando x → a; de una suma de funciones [f(x) + g(x)] es igual la suma de los límites de cada función, simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

EJEMPLO: Si f(x) = $4x^2$ y g(x) = 3x +1, el límite cuando x → 1; de f(x) + g(x) = $4x^2$ + 3x + 1 es:

$$\lim_{x \to 1} 4x^2 + 3x + 1 = \lim_{x\to1} 4x^2 + \lim_{x\to1} 3x + \lim_{x\to1} 1$$

$$\lim_{x\to1} 4. \lim_{x\to1} x^2 + \lim_{x\to1} 3. \lim_{x\to1} x + \lim_{x\to1} 1$$
$$\lim_{x\to1} 4. \lim_{x\to1} (1)^2 + \lim_{x\to1} 3. \lim_{x\to1} (1) + \lim_{x\to1} 1$$

$$4.(1) + 3.(1) + 1 = 8$$

$$\lim_{x\to1} 4x^2 + 3x + 1 = 8$$

4. **LÍMITE DE UNA DIFERENCIA DE FUNCIONES:**

El límite cuando x → a; de una diferencia de funciones [f(x) - g(x)] es igual la diferencia de los límites de cada función, simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

EJEMPLO: si f(x) = x^2 y g(x) = 2x + 1, el límite cuando x → 1; de f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1 es:

$$\lim_{x \to -3} x^2 - 2x - 1 = \lim_{x\to-3} x^2 - \lim_{x\to-3} 2x - \lim_{x\to-3} 1$$

$$\lim_{x\to-3} x^2 - \lim_{x\to-3} 2. \lim_{x\to-3} x - \lim_{x\to-3} 1$$

$$\lim_{x\to-3} (-3)^2 - \lim_{x\to-3} 2. \lim_{x\to-3} (-3) - \lim_{x\to-3} 1$$

$$(-3)^2 - 2(-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$$

$$\lim_{x \to -3} x^2 - 2x - 1 = 14$$

5. **LÍMITE DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES:**

El límite cuando x → a; de un producto de funciones [f(x). g(x)] es igual al producto de los límites de cada función, simbólicamente:

$$\lim_{x \to a}[f(x)\ .\ g(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\ .\ \lim_{x \to a} g(x)$$

EJEMPLO: Si f(x) = x + 1 y g(x) = x - 1, el límite cuando x → 1; de f(x). g(x) = (x + 1). (x- 1) es:

$$\lim_{x \to 1}(x+1)(x-1) = \lim_{x \to 1}(x+1)\ .\ \lim_{x \to 1}(x-1)$$

$$(\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 1)\ .(\lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 1)$$

$$(\lim_{x \to 1} 1 + \lim_{x \to 1} 1)\ .(\lim_{x \to 1} 1 - \lim_{x \to 1} 1)$$

$$(2)\ .\ (0) = 0$$

$$\lim_{x\to 1}(x+1)(x-1) = 0$$

6. **LÍMITE DE UN COCIENTE DE FUNCIONES:**

El límite cuando x → a; de un cociente de funciones [f(x) ÷ g(x)] es igual al cociente de los límites de cada función, simbólicamente:

$$\lim_{x \to a}[f(x)\ \div .\ g(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\ \div .\ \lim_{x \to a} g(x)$$

EJEMPLO. Si f(x) = x + 1 y g(x) = x - 1, el límite cuando x → 2; de f(x) ÷ g(x) = (x + 1) ÷ (x- 1) es:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+1)}{\lim_{x\to 2}(x-1)}$$

$$\frac{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1}$$

$$\frac{\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} 2 - \lim_{x\to 2} 1}$$

$$\frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+1)}{(x-1)} = 3$$

7. **LÍMITE DE UNA RAÍZ:**

El límite cuando **x → a**; de una función raíz **f (x) = √ g (x)** es igual a la raíz del límite; si g(x) > 0, simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

EJEMPLO. Si f(x) = √ 2x + 1, el límite cuando x → 4; de f(x) es:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(2x+1)}$$

$$\sqrt{\lim_{x\to 4} 2 \ . \ \lim_{x\to 4} x + \lim_{x\to 4} 1}$$

$$\sqrt{\lim_{x\to 4} 2 \ . \ \lim_{x\to 4} 4 + \lim_{x\to 4} 1}$$

$$\sqrt{4.(2)+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = 3$$

8. **LIMITE DE UNA POTENCIA:**

El límite cuando **x → a**; de una función potencia **f (x) = [g (x)]^n** es igual a la potencia del límite; Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

EJEMPLO. Si f(x) = $(x + 1)^2$ el límite cuando x → 2; de f(x) es:

$$\lim_{x \to 2} (x+1)^2 = [\lim_{x \to 2} (x+1)]^2$$

$$[\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1]^2$$

$$[\lim_{x \to 2} 2 + \lim_{x \to 2} 1]^2$$

$$[2+1]^2 = [3]^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 2} (x+1)^2 = 9$$

Aplicando las propiedades simultáneamente:

EJEMPLO. Hallar el límite de la siguiente función $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3} = \frac{\lim_{x \to -2} 2x^2 + 3x}{\lim_{x \to -2} x - 3}$$ límite de un cociente.

$$\frac{\lim_{x\to -2} 2x^2 + \lim_{x\to -2} 3x}{\lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 3}$$ límite de una suma.

$$\frac{\lim_{x\to -2} 2\ .\ \lim_{x\to -2} x^2 + \lim_{x\to -2} 3\ .\ \lim_{x\to -2} x}{\lim_{x\to -2} x - \lim_{x\to -2} 3}$$ límite de una producto.

$$\frac{2.(-2)^2 + 3(-2)}{(-2) - 3} = \frac{8-6}{-2-3} = -\frac{2}{5}$$ operando y simplificando.

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3} = -\frac{2}{5}$$

NOTA:

Decimos que el límite de f(x) cuando x → a; no depende del valor de f(x) en x = a. No obstante, si ocurre que el límite es precisamente f(a), decimos que el límite puede evaluarse por **sustitución directa.** Es decir,

$$\lim_{x\,\to\,a} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2 + 3x}{x - 3} = \frac{2.(-2)^2 + 3(-2))}{(-2) - 3} = \frac{8-6}{-2-3} = -\frac{2}{5}$$

Comprueba tus saberes

Elabora los ejercicios en hojas blancas e intégralas a tu portafolio de evidencias el cual las solicitará el docente en el momento que así crea conveniente.

En cada uno de los siguientes ejercicios hallar el límite aplicando las propiedades:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5}{x^3 + 6} =$

2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x}{x} =$

3. $\lim_{x \to 5} \sqrt{2x^2 - 1} =$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 - 4}{x - 1} =$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x + 1} =$

6. $\lim_{x \to 4} \frac{x + 1}{x - 3} =$

7. $\lim_{x \to -1} x^2 - 3x + 1 =$

8. $\lim_{x \to -2} (2-x)^2 =$

Límites de funciones algebraicas

Un límite algebraico es un límite que tiene alguna expresión algebraica y al reemplazarla por el valor dado, nos da una indeterminación. La indeterminación más común en los límites algebraicos es:

$$\frac{0}{0}$$

Siempre que nos den un **límite**, lo primero que debemos hacer es reemplazar la variable por el valor dado y ver si existe alguna indeterminación.

Si al reemplazar no obtenemos una indeterminación, entonces significa que el valor que nos dio al reemplazar es el valor del límite.

Dentro de los límites algebraicos existen tres casos muy comunes que se nos pueden presentar para resolverlos:

- **Caso I**: resolver con factorización
- **Caso II**: resolver con racionalización del denominador
- **Caso III**: resolver multiplicando por el conjugado.

Caso I: Resolver con factorización.

Cuando tenemos una expresión algebraica fraccionaria o racional debemos proceder de la siguiente manera:

1. Factorizamos las expresiones algebraicas en el numerador y en el denominador
2. Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo
3. Reemplazamos la variable por el valor dado y obtenemos el resultado del límite

4. Si aún no se ha quitado la indeterminación, repetimos los pasos 1 al 3 hasta levantar la indeterminación.

Ahora, veamos ejemplos:

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x^2-1}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(-1)^2-1}{\sqrt{-1+1}} = \frac{0}{0}$$

Como **SÍ** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 4:

Primero: multiplicamos arriba y abajo por el radical del denominador para eliminar la raíz

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2-1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+1}}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando, las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x^2-1)\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Segundo: factorizamos el numerador y el denominador. En este caso no es necesario factorizar el denominador.

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Tercero: simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\sqrt{x+1}}{\cancel{x+1}}$$

$$\lim_{x\to -1} (x-\ 1)\sqrt{x+1}$$

Cuarto: reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$(-1-1)\sqrt{-1+1} = 0$$

Solución:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

Otro ejemplo:

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{\sqrt{x^3 - 8}}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(2)^2 + 3(2) - 10}{\sqrt{2^3-8}} = \frac{0}{0}$$

Como **SÍ** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 a 4:

Primero: multiplicamos arriba y abajo por el radical del denominador para eliminar la raíz.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+3x-10)\sqrt{x^3-8}}{\sqrt{x^3-8}\cdot\sqrt{x^3-8}}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+3x-10)\sqrt{x^3-8}}{x^3-8}$$

Segundo: factorizamos el numerador y el denominador. En el denominador tenemos una diferencia de cubos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)\sqrt{x^3-8}}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

Tercero: simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)\cancel{(x-2)}\sqrt{x^3-8}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)\sqrt{x^3-8}}{x^2+2x+4}$$

Cuarto: reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{(2+5)\sqrt{(2)^3-8}}{(2)^2+2(2)+4} \quad 0 \quad 0$$

$$= \frac{}{12} =$$

Solución:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{\sqrt{x^3 - 8}} = 0$$

__Caso III__: Resolver multiplicando por el conjugado.

Este caso ocurre cuando hay una expresión algebraica racional, y en el denominador tenemos una parte de la expresión dentro de un radical y otra parte afuera del radical.

Recuerda que el conjugado de una expresión es la misma expresión, pero con signo contrario. El conjugado de $\sqrt{x}$ -3 es $\sqrt{x}$-3

Para resolver un límite con este caso debemos proceder de la siguiente manera:

1. Multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador para cancelar las raíces del denominador.
2. Factorizamos las expresiones algebraicas en el numerador y en el denominador.
3. Simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo.
4. Reemplazamos la variable por el valor dado y obtenemos el resultado del límite.

Si aún no se ha quitado la indeterminación, repetimos los pasos uno al cuatro hasta levantar la indeterminación.

Ahora, veamos unos ejemplos.

Resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 3} - 1}$$

Lo primero que debemos hacer es verificar si hay indeterminación reemplazando el valor de la variable:

$$\frac{(1)^2 + 2(1) \quad 3}{\sqrt{(1)^2 + 3(1) - 3} - 1} = \frac{0}{0}$$

Como **SÍ** hay indeterminación, entonces aplicaremos los pasos 1 al 4.

Primero: multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador para eliminar la raíz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{(\sqrt{x^2+3x-3}-1)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}$$

Recuerde que cuando multiplicamos dos raíces cuadradas que tienen el mismo radicando, las raíces se cancelan y queda lo que está por dentro.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{x^2+3x-3-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{x^2+3x-4}$$

Segundo: factorizamos el numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{(x+4)(x-1)}$$

Tercero: simplificamos los factores que sean iguales arriba y abajo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\cancel{(x-1)}(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{(x+4)\cancel{(x-1)}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(\sqrt{x^2+3x-3}+1)}{(x+4)}$$

Cuarto:
Reemplazamos la variable por el valor dado y encontramos la solución del límite:

$$\frac{(1+3)(\sqrt{(1)^2+3(1)-3}+1)}{1+4}=\frac{(4)(2)}{5}=\frac{8}{5}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2+3x-3}-1} = \frac{8}{5}$$

Límites de funciones trascendentes

Las funciones que no son algebraicas se llaman funciones trascendentes.

Son funciones trascendentales elementales:

Función exponencial:

f(x)=ax; a > 0, a ^{1} *1.*

Función logarítmica:

f(x)=loga(x); a > 0, a ^{1} *1.*

Es inversa de la exponencial.

Ejemplos:

Si 0 < a < 1

Funciones trigonométricas:

También llamadas circulares.

f(x)=sen(x); f(x)=cos(x); f(x)=tg(x); f(x)=cosec(x); f(x)=sec(x) y f(x)=cotg(x)

Límites de exponenciales

El límite de una exponencial depende, sobre todo, de la **base** de la exponencial.

Límite cuando x→+∞

Supongamos que x tiende a +∞ , entonces:

- Si la base es mayor que 1, el límite es infinito positivo. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} 5^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

- Si la base está entre 0 y 1, el límite es 0. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

- Si la base es 1, el límite es 1:

$$\lim_{x\to+\infty} 1^x = 1$$

Importante: si se trata de una función exponencial cuya base tiende a 1 y cuyo exponente tiende a infinito, entonces, tenemos la indeterminación 1 elevado a infinito.

Límite cuando x→-∞

Supongamos que x tiende a -∞ , entonces:

- Si la base es mayor que 1, el límite es 0. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$$

- Si la base está entre 0 y 1, el límite es infinito. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty} 0.8^x = +\infty$$

Ejemplos de límite con función logarítmica:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{\log\left(\sqrt{x}\right)}$$

No podemos sustituir x=0x=0 porque no está definido el logaritmo de 0. Aplicando las propiedades de los logaritmos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{\log\left(\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{\log(x)}{\log(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 = 2$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$

Como ambas fracciones tienden a ∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

Límites de funciones trigonométricas:

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}$$

Ayuda: utiliza el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Escribimos el denominador de forma factorizada:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Ahora, reescribimos la función como un producto:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{\sin(x+1)}{x+1}$$

Observa que la fracción de la derecha tiende al seno de ∞ entre ∞, que sabemos por el enunciado que es 1. Por su parte, la fracción de la izquierda tiende a $^{-1/2}$. Por tanto,

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} \cdot \frac{\sin(x+1)}{x+1} = -\frac{1}{2} \cdot 1$$

Así,

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin\,(x+1)}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\,(x)}$$

Ayuda: utiliza el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\,(x)}{x} = 1$$

Escribimos la raíz como una potencia:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$$

Como el coseno de ∞ es 1, tenemos la indeterminación *uno elevado a infinito*. Aplicamos la fórmula:

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos(x)-1}{x}}$$

Para poder calcular el límite, operamos un poco en el exponente:

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=$$

$$=\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}=$$

$$=\frac{\cos^2(x)-1}{x\cdot(\cos(x)+1)}=$$

$$=-\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)+1}=$$

$$=\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}$$

El límite de la primera fracción es 1 y el de la segunda es ∞:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}=\frac{0}{2}=0$$

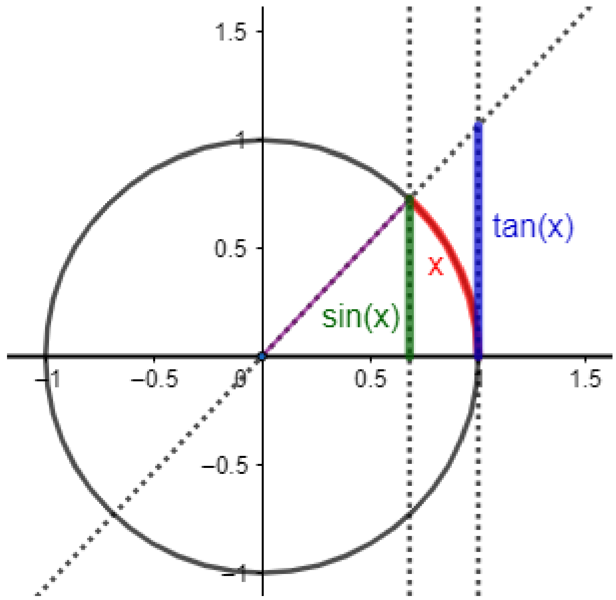
Así, el límite inicial es:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos(x)}=e^0=1$$

Ejemplo 2. Demostrar el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Ayuda: representación del coseno de x, del arco de circunferencia con ángulo x y de la tangente de x en una circunferencia de radio *R=1*, siendo *0* < x < *π/2*:



Como se observa en la representación, dado $0 \leq x \leq \pi/2$, se cumple

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Como el seno es no negativo en dicho intervalo, podemos dividir entre el seno sin que cambien las desigualdades:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

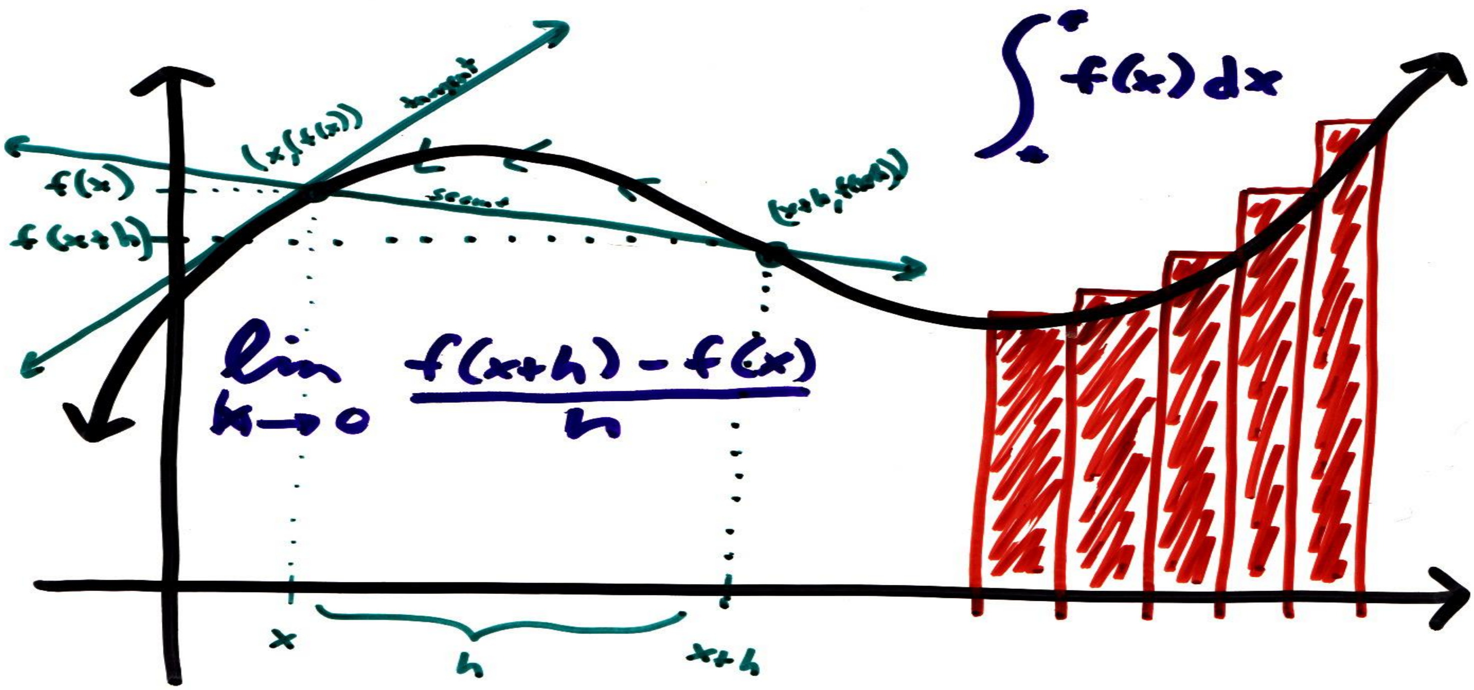
$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{\tan(x)}{\sin(x)}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

Como el coseno de *0* es *1*, cuando x tiende a *0*, necesariamente *x/sin(x)* tiende a *1* (por el teorema del emparedado):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

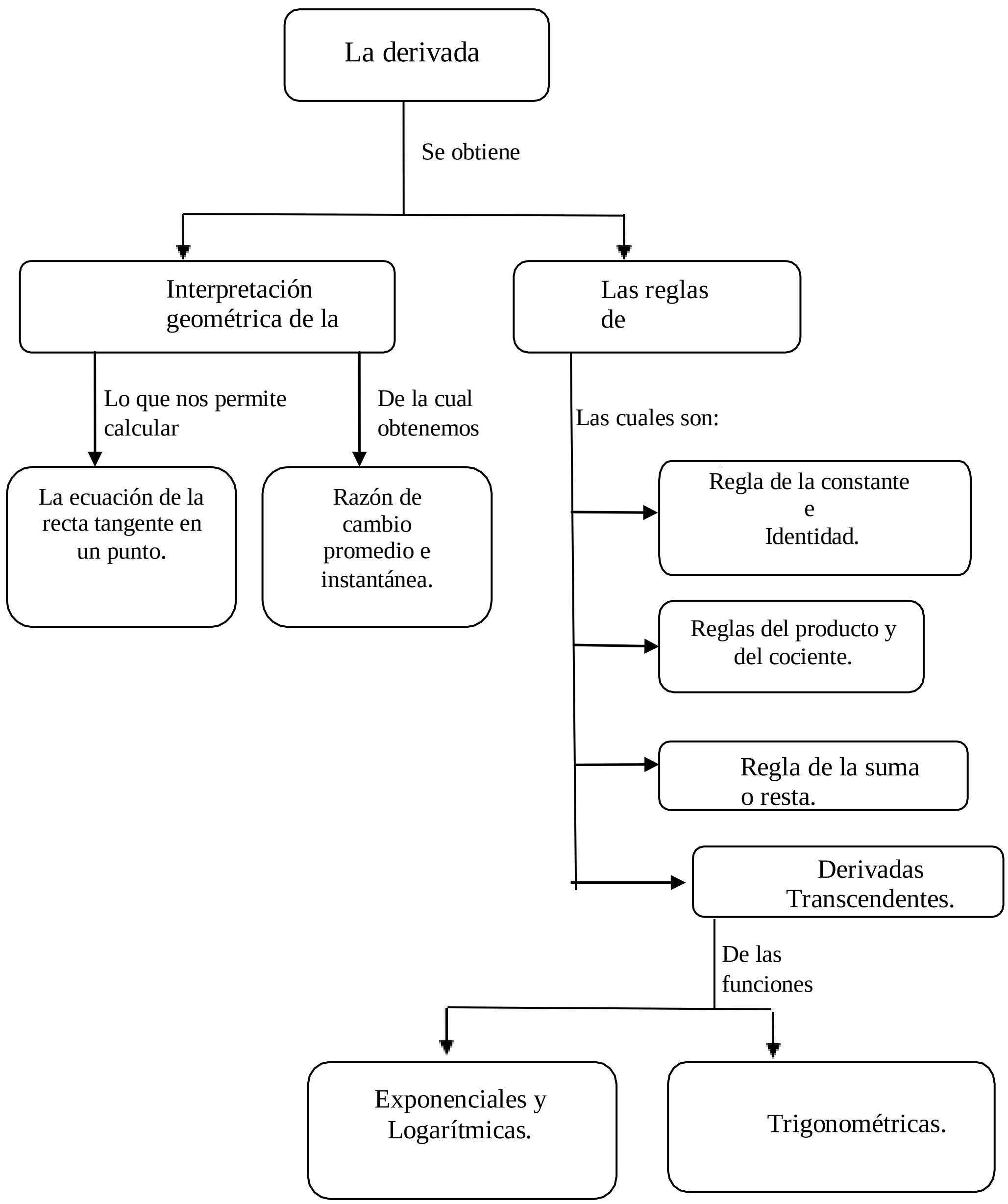
Bloque II: La derivada



Bloque II: La derivada

El propósito del presente bloque es aplicar los métodos de derivación trabajando de forma metódica y organizada para contribuir en la solución de situaciones hipotéticas o reales de manera crítica y reflexiva; mediante ejemplificación, reforzamiento por medio de videos y con ello estés en condiciones de realizar las actividades de aprendizaje que se te presentan para aterrizar el aprendizaje adquirido.

Es fundamental que como alumno domines las reglas básicas de derivación y seas capaz de derivar directamente las funciones algebraicas, trascendente y de orden superior, para mejor comprensión se presenta el siguiente mapa conceptual, en el puedes observar paso a paso el contenido del bloque II.



La derivada

Durante los siglos XVI y XVII surgió la necesidad de establecer la forma en que varía una cantidad de otra, como en física, en sus problemas fundamentales, en donde se requiere saber cómo varía la posición de un cuerpo al transcurrir el tiempo. Por esto, se introdujeron conceptos de magnitud de variables y función. Esta evolución dio como consecuencia el nacimiento de diferentes disciplinas, entre la que está el cálculo diferencial, que básicamente estudia la variación y los procesos de cambio.

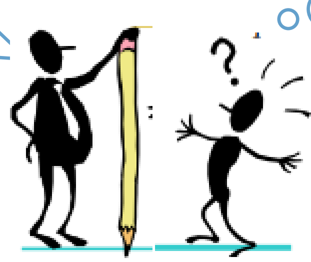
Gottgried Wilhem Leibniz (1646-1716) Como matemático, su nombre está unido al del gran **Newton**, como coautor del cálculo infinitesimal

El cálculo es la matemática del movimiento y del cambio, y como puedes ver, nada puede existir en el universo sin que sufra un cambio, no ha de sorprendernos la inmensa variedad de aplicaciones del cálculo.

Ahora entiendo, entonces los cuatro problemas involucran la noción intuitiva de límite, y sirvió para introducirse a un nuevo conocimiento que se llamó Cálculo.

Escucha…La historia nos narra que el desarrollo del cálculo nació de cuatro grandes problemas observados por europeos en el siglo XVII:

1. El problema de la tangente.
2. El problema de la aceleración.
3. El problema de máximos y mínimos.
4. El problema del área.



La derivada tiene su origen en la física y en las matemáticas, para la física de Newton era importante conocer la velocidad instantánea de cualquier objeto, pues era sumamente complicado en esos tiempos encontrar ese concepto de velocidad, y por otro lado, se encontraban los matemáticos queriendo entender el concepto que los griegos ya habían tenido en el siglo III a.C. que se fundamentaba en lo mismo, y era saber el cómo una **recta secante se podría convertir en una recta tangente** moviendo solo un punto.

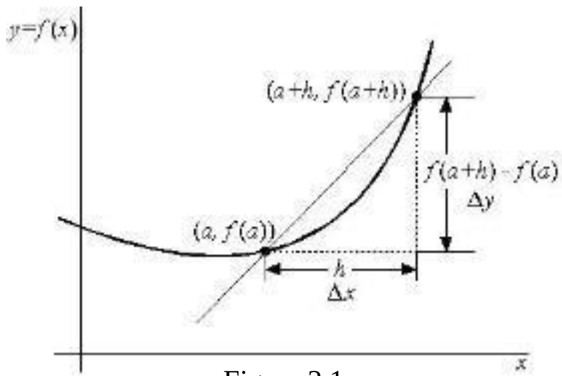
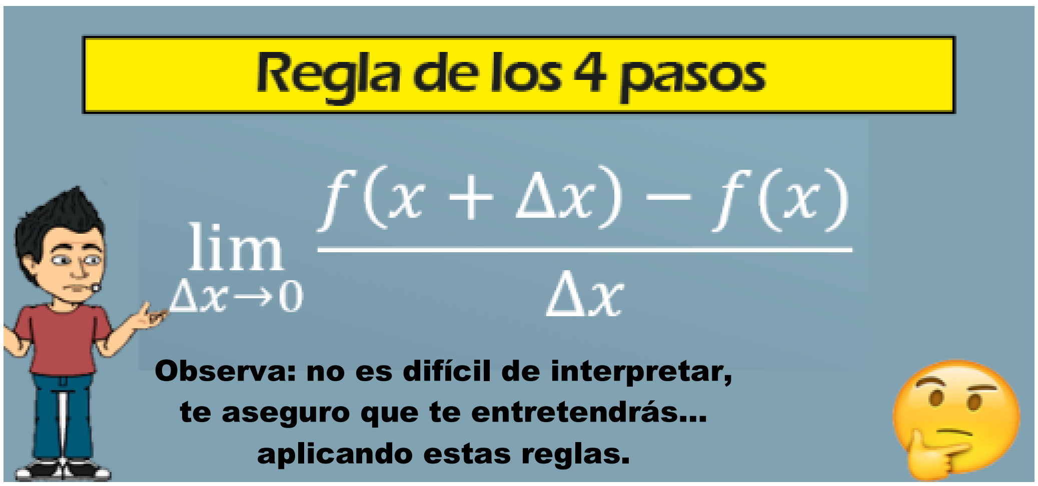


Figura 2.1

A partir de esas dudas se concluyó lo siguiente:

https://www.youtube.com/watch?v=_6-zwdrqD3c

https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc



PASO 1	**Sumar el incremento** $f(x+h)$
PASO 2	**Restar la función original** $-f(x)$
PASO 3	**Dividir entre el incremento** h
PASO 4	Evaluar el límite cuando se tiende a cero $\lim\limits_{h \to 0}$

En otros casos, también puedes ver la derivada usando incrementos. Pero es lo mismo, exactamente lo mismo.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Para entender mejor veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1. Resuelva la siguiente derivada haciendo uso de la regla de los cuatro pasos $y = 5x^2$

Primer Paso: (incrementamos) ***recuerda que es en ambos lados***

$y + \Delta y = 5(x + \Delta x)^2$

Segundo Paso: (restamos la función original)

$y + \Delta y - y = 5(x + \Delta x)^2 - 5x^2$

Podemos seguir haciendo el otro paso, pero no tendría caso si lo hacemos ya que debemos dejar clara la expresión que tenemos hasta ahora, y es momento para desarrollar el binomio al cuadrado, así que:

$$\Delta y = 5(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 5x^2$$

Aplicamos la propiedad distributiva

$$\Delta y = 5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 5x^2$$

$$\Delta y = 10x\Delta x + 5\Delta x^2$$

Tercer Paso: (dividir entre delta de X)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10x\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x + 5\Delta x$$

Cuarto Paso: (evaluar el límite) Resultado: 10x

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 10x$$

Ejemplo 2: Resuelva la siguiente derivada haciendo uso de la regla de los cuatro pasos:

$$y = \frac{3x+2}{2x-1}$$

Anotamos todos los pasos, pero iremos resolviendo paso a paso.
Seguimos reduciendo.
Pero observa lo que nos ha quedado en el numerador:

$$\frac{(2x+1)(3x+3\Delta x+2) - (3x+2)(2x+2\Delta x-1)}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$

$$\frac{-7\Delta x}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$

Ahora si lo colocamos en nuestro límite, que es lo mismo escribirlo de la siguiente manera:
Simplificando:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-7}{(2x+2\Delta x-1)(2x-1)}$$

Evaluando el límite
Por lo que la derivada es:

Resultado $$y' = -\frac{7}{(2x-1)^2}$$

Refuerza tu aprendizaje con los siguientes videos alojados en la Web
https://www.youtube.com/watch?v=uK4-s0ojHFg&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__
https://www.youtube.com/watch?v=xx6bljehplA

Comprueba tus saberes

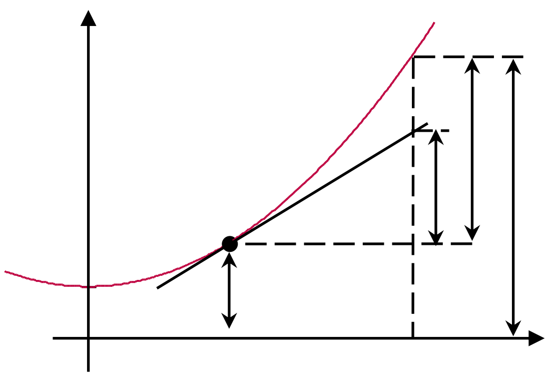
Actividad de aprendizaje: Observar no es complicado. Elabora los ejercicios en hojas blancas e intégralas a tu portafolio de evidencias las cuales te solicitará el docente en el momento que así crea conveniente.

No.	Función	Respuesta
1.-	$y = 3x^3 - 2x^2 + 1$	
2.-	$y = \dfrac{3x^2 + 1}{2x}$	
3.-	$y = \sqrt{x - 3}$	

Aproximaciones

Las diferenciales desempeñan varios papeles, el principal uso está en proporcionar aproximaciones.

Suponga $y = f(x)$, como se muestra en la figura 2.2. Un incremento Δx produce un correspondiente incremento Δy en y, que puede aproximarse con dy. Así, $f(x+\Delta x)$ se aproxima por medio de



$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$$

FIGURA 2.2

Ejemplo 1. Suponga que necesita buenas aproximaciones para $\sqrt{4.6}$ y $\sqrt{8.2}$, sin utilizar calculadora.

SOLUCIÓN: partiendo de la gráfica, cuando x cambia de 4 a 4.6, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{4} = 2$ a aproximadamente $\sqrt{4} + dy$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Por lo tanto, $x = 4$ y $dx = 0.6$, sustituyendo en la diferencial, tenemos:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0.6) = \frac{0.6}{4} = 0.15 \qquad \sqrt{4.6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0.15 = 2.15$$

De igual manera, procedemos cuando x cambia de 9 a -0.8, $\sqrt{x}$ cambia de $\sqrt{9} = 2$ a aproximadamente $\sqrt{9} - dy$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Por lo tanto, $x=9$ y $dx=-0.8$, sustituyendo en la diferencial, tenemos:

$$dy=\frac{1}{2\sqrt{9}}(-0.8)=-\frac{0.8}{6}=-0.1333 \qquad \sqrt{8.2}\approx\sqrt{9}-dy=3-0.1333=2.8667$$

Visita el siguiente link y retroalimenta tu aprendizaje.

https://www.youtube.com/watch?v=sWm4l86WvPo

Comprueba tus saberes

Actividad de aprendizaje: En equipo colaborativo resuelvan en hojas blancas los siguientes ejercicios utilizando diferenciales para aproximar los números dados y compara con el valor de la calculadora. Recuerda integrarlas en tu portafolio de evidencias.

No.	Calcula la aproximación	Procedimiento	Respuesta
1	$\sqrt{34.5}$		
2	$\sqrt{360}$		
3	$\sqrt{490}$		

Estimación de errores

El siguiente problema ilustra el uso de las diferenciales en la estimación de los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas.

Ejemplo1. La arista de un cubo se midió como 9.7 centímetros con un posible error de ± 0.04 centímetros. Evalúe el volumen del cubo y proporcione una estimación para el posible error en este valor.

Solución: Si el volumen de un cubo está dado por $V(x)=x^3$. Entonces, la diferencial es $dV=3x^2dx$. Con los datos anteriores de $x=9.7$ y $dx=0.04$, el volumen del cubo y el error absoluto es:

$$V(x)=(9.7)^3=912.67cm^3$$

$$\Delta V \approx dV = 3(9.7)^2(0.04)=11.29cm^3$$

Por lo consiguiente, el volumen del cubo es $V=912.67\pm 11.29$ centímetros cúbicos.

La cantidad ΔV se denomina error absoluto. Existe otra medida de error que es el error relativo, que se obtiene dividiendo el error absoluto entre el volumen total.

$$\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{dV}{V}\approx\frac{11.29cm^3}{912.67cm^3}\approx 0.0124$$

El error relativo se expresa frecuentemente en términos de porcentajes, entonces, el error relativo es aproximadamente 1.24%.

Sabías que…

Los conceptos de variación, razón de cambio, derivada, y los símbolos Δx, Δy, dx, dy y dy/dx, que se utilizan hoy en cálculo fueron introducidos por Leibniz y los símbolos f´(x), f´´(x), también para las derivadas fueron introducidos por el matemático y astrónomo francés Joseph Louis LaGrange, nacido en Turín (Italia), en 1797. LaGrange, además, empleó por primera vez el nombre de derivada.

Δ Es una letra griega llamada delta. Que significa: CAMBIO o INCREMENTO

https://www.youtube.com/watch?v=rvfrhvUiHT8

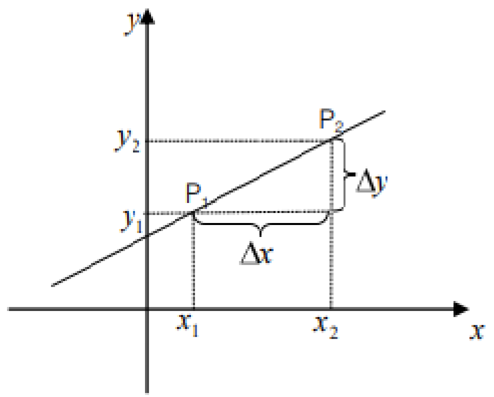
Razón de cambio promedio

En Geometría Analítica (Matemáticas 3) se estudió lo referente a la pendiente de una recta que pasa por los puntos ***P₁(X₁, Y₁) y P₂ (X₂, Y₂)*** denotada como **"*m*"**, la cual la podías calcular utilizando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Utilizando la notación de cambio o incremento, la expresión anterior la podemos transcribir como: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Como se muestra en la siguiente gráfica:



Se lee como "razón de cambio de "y" con respecto a "x".

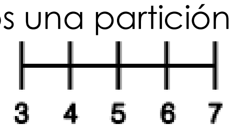
https://www.youtube.com/watch?v=h4_GCRm_4cQ

Razón de cambio promedio.
Sea f una función tal que $y = f(x)$ y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ un par de puntos de f. Definimos la razón de cambio promedio de " y " con respecto a " x " como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Determinar la razón de cambio promedio de la función: ***f (x) 3x 1*** *en el intervalo* ***[3,7].***

Solución: hagamos una partición del intervalo ***[3,7]*** de la siguiente manera:



Realizando la siguiente tabla:

x	y=f(x)	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	*f(3)=10*	*4-3=1*	*f(4)- f(3)=13-10=3*	$\frac{3}{1}$
4	*f(4)=13*	*5-4=1*	*f(5)- f(4)=16-13=3*	$\frac{3}{1}$
5	*f(5)=16*	*6-5=1*	*f(6)- f(5)=19-16=3*	$\frac{3}{1}$
6	*f(6)=19*	*7-6=1*	*f(7)- f(6)=22-19=3*	$\frac{3}{1}$
7	*f(7)=22*			

Observa la tabla, te puedes dar cuenta que la razón de cambio promedio de la función ***f (x) 3x 1*** en el intervalo ***[3,7]*** con la partición del intervalo dada, permanece constante y es igual a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$$

NOTA: si tomamos los puntos $\boldsymbol{x_1}$ ***4.5*** *y* $\boldsymbol{x_2}$ **6.2**, y sustituimos estos valores en la función, se tiene que:

f (x_1) *= 3(4.5)+ 1= 13.5+ 1= 14.5* ***y*** *f* (x_2)*=3(6.2) +1= 18.6+1=19.6 .*

Entonces, la razón de cambio promedio de la función es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19.6-14.5}{6.2-4.5} = \frac{5.1}{1.7} = 3$

La razón de cambio instantánea

Razón de cambio instantáneo.

Sea $y = f(x)$ una función definida en todos puntos del intervalo (x_1, x_2), definimos la razón de cambio instantáneo de la función en x cómo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

o bien:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Visita los links y realiza anotaciones en tu libreta para apoyo en próximos trabajos:

https://www.youtube.com/watch?v=uw518mmomcU

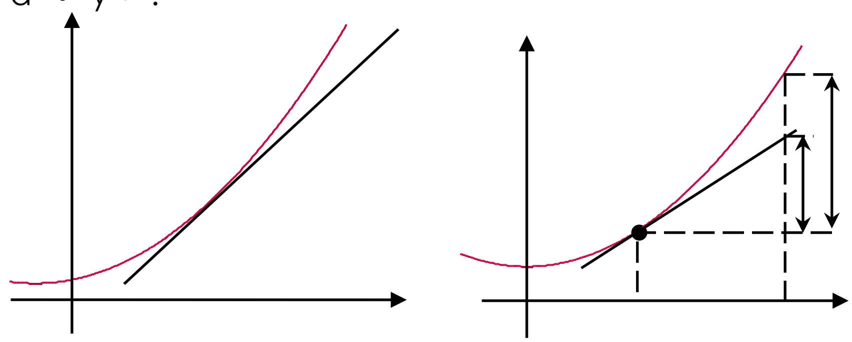
https://www.youtube.com/watch?v=uCrX3vM8bAg

Definición de la diferencial

La notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ ha sido utilizado para la derivada de y respecto de x. La notación $\frac{d}{dx}$ se ha utilizado como un operador para la derivada respecto a x. Así, $\frac{d}{dx}$ y D, son sinónimos. En cálculo diferencial se ha tratado a $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}$ como un solo símbolo y no se ha tratado de dar significados separados a los símbolos dy y dx. Por lo que, en este curso se dará el significado a dy y dx.

FIGURA 2

FIGURA 1.



Supongamos que la función f es derivable sobre el segmento $[a,b]$. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la gráfica de $y = f(x)$ como se muestra en la representación gráfica en la figura 1.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$$

Si Δx es pequeña, el cociente $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$ será aproximadamente $f(x_0)$, de modo que:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x f'(x_0)$$

El lado izquierdo de esta expresión se denomina Δy, este el cambio real en y cuando x cambia de x_0 a $x_0+\Delta x$. El lado derecho se denomina dy, y sirve como una aproximación para Δy. De acuerdo a la gráfica en la figura 2, la cantidad dy es igual al cambio en la recta tangente en P cuando x cambia de x_0 a $x_0+\Delta x$. Δx es pequeña, esperamos que dy será una buena aproximación para Δy y será sólo una constante por Δx.

Por lo general es más fácil de calcular

Definición. Sea $y=f(x)$ una función derivable de la variable independiente x.

Δx, es un incremento arbitrario en la variable independiente x.

dx, denominada la **diferencial de la variable independiente** x, es igual a Δx.

$\Delta y \Delta y$, es el cambio real en la variable y cuando x cambia de x_0 a $x_0+\Delta x$; esto es, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

dy, llamada la **diferencial de la variable dependiente** y se define como $dy = f'(x)dx$.

Teoremas sobre Diferenciales

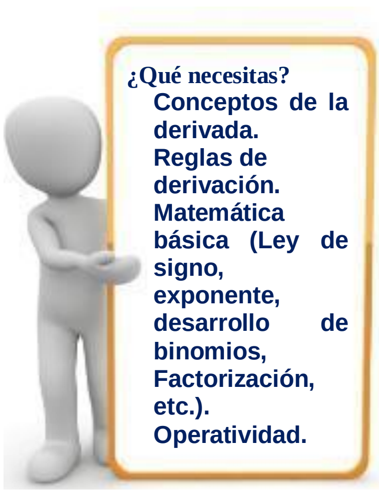
Se fundamenta que la diferencial de una función es el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, por lo tanto, se acepta que, a cada fórmula de derivación, le corresponde una diferenciación como se muestra a continuación.

Visita el siguiente link

https://www.youtube.com/watch?v=O6PeN5SJxzk

Fórmulas diferenciales generales

FÓRMULA O REGLA DE DERIVACIÓN	DIFERENCIACIÓN
1. Constante $\frac{dc}{dx}=0$	$dc=0$
2. Múltiplo constante $\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}$	$d(cu)=cdu$
3. Suma y resta $\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	$d(u+v)=du+dv$
4. Producto $\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	$d(uv)=udv+vdu$
5. Cociente $\frac{d(u/v)}{dx}=\frac{v(du/dx)-u(dv/dx)}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
6. Potencia $\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$d(u^n)=nu^{n-1}du$



En el proceso de calcular la derivada es importante expresar el resultado en su mínima expresión, lo que te permitirá la realización de cálculos algebraicos que a lo largo del bachillerato haz realizado y hoy contribuyen parte primordial para continuar adquiriendo conocimientos, habilidades y destrezas en las matemáticas.

Las reglas y fórmulas básicas de derivación de la sesión anterior te habrás dado cuenta que la derivación de funciones a partir de su definición, usando la regla de los cuatro pasos; el cual te puedo resultar bastante laboriosa y tediosa en los ejercicios más complejos. Por esta razón es importante hacer usos de las reglas o teoremas diferenciales que permita realizar un proceso rápido y fácil en el cálculo de diversas derivadas de funciones de uso más frecuente.

Derivadas de funciones algebraicas

Para entender mejor, veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1. Calcula la derivada de la función $f(x) = 5\pi$

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Aplicando regla de una constante:

$$f(x) = 5\pi$$

Entonces:

$$f(x) = 0$$

Ejemplo 2. Calcula la derivada de la función $f(x) = 4x$

$$\frac{d(cu)}{dx} = c\,\frac{du}{dx}$$

Aplicando regla de una constante por la función identidad:

$$f(x) = 4x$$

$$f(x) = 4(1)$$

Entonces:

$$f(x) = 4$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$$

Recuerda que la derivada de la función identidad f(x)=x=1, en este caso la razón de cambio es 1 a 1.

Ejemplo 3. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{3x^2}$

Transformando la función a la forma de **potencia** $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\,\frac{du}{dx}$

$$f(x) = \frac{2}{3}\,x^{-2}$$

Aplicando el teorema y simplificando se tiene la derivada de la función.

$$D_x f(x) = \frac{2}{3}\,(-2x^{-3}) = -\frac{4}{3}\,x^{-3} = -\frac{4}{3x^3}$$

Ejemplo 4. Calcula la derivada de la función $f(x) = 8x + 6$

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$f(x) = 8x + 6$$

$$f(x) = 8(1) + 6$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(C) = 0$$

Recuerda que la derivada de una constante es igual a cero. En este caso 6 es una constante por lo tanto es igual a 0.

Entonces:

$$f(x) = 4$$

Ejemplo 5. Calcula la derivada de la función $f(x) = \frac{3x^2-2x}{3x}$

Se desea calcular la derivada de un **cociente** de la forma:

$$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

Aplicando el teorema

$$= \frac{3x(6x-2) - (3x^2-2x)(3)}{(3x)^2} = \frac{18x^2 - 6x - 9x^2 + 6x}{9x^2} = \frac{9x^2}{9x^2} = 1$$

Refuerza tu conocimiento y visita los siguientes videos alojados en la Web

https://www.youtube.com/watch?v=gh47xdy4rbw
https://www.youtube.com/watch?v=_Hrx6MM9Qo4
https://www.youtube.com/watch?v=iyndofvTTiE
https://www.youtube.com/watch?v=xr0_7dPW-Iw
https://www.youtube.com/watch?v=PqJMmy0rafQ

Comprueba tus saberes

Actividad de aprendizaje: en hojas blancas calcule la derivada de las siguientes funciones mediante regla de derivación. Integra dicha actividad a tu portafolio de evidencias.

No.	Calcula la derivada	Procedimiento	Respuesta
1	$f(x) = -3x^{-3}$		
2	$f(x) = 5x^7 2x - 6$		
3	$f(x) = \frac{-8}{x^{10}}$		
4	$f(x) = \sqrt[6]{x}$		
5	$f(x) = 5x^4 - 2x^3 + 6x - 2$		
6	$f(x) = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$		
7	$f(x) = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$		
8	$f(x) = \frac{1}{3x^2 + 1}$		
9	$f(x) = \frac{2}{5x^2 - 1}$		
10	$f(x) = (1 - x)^2$		

Derivada de funciones transcendentes

Las funciones elementales a las cuales les hemos estado calculando derivadas se llaman en general funciones algebraicas. Para completar las reglas de derivación de las funciones elementales nos falta un grupo de ellas denominadas funciones trascendentes, entre las cuales están las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Para las derivadas de las funciones trigonométricas son las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente son derivables en todo su dominio y se cumplen las siguientes reglas.

FORMULARIO DE LAS REGLAS DE DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES TRASCENDENTES

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.
$1.-\frac{d}{dx}(senu)=cosu\cdot\frac{du}{dx}$	$1.-\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$2.-\frac{d}{dx}(cosu)=-senu\cdot\frac{du}{dx}$	$2.-\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$3.-\frac{d}{dx}(tanu)=sec^2u\cdot\frac{du}{dx}$	$3.-\frac{d}{dx}(\tan^{-1}u)=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$4.-\frac{d}{dx}(cotu)=-csc^2u\cdot\frac{du}{dx}$	$4.-\frac{d}{dx}(\cot^{-1}u)=-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$5.-\frac{d}{dx}(secu)=secu\cdot tanu\frac{du}{dx}$	$5.-\frac{d}{dx}(\sec^{-1}u)=\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
$6.-\frac{d}{dx}(cscu)=-cscucotu\frac{du}{dx}$	$6.-\frac{d}{dx}(\csc^{-1}u)=-\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
	DERIVADAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES.
	$1.-\frac{d}{dx}(e^u)=e^u\cdot\frac{du}{dx}$
	$2.-\frac{d}{dx}(a^u)=a^u lna\cdot\frac{du}{dx}$
	DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARITMICAS.
	$1.-\frac{d}{dx}(lnu)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$
	$2.-\frac{d}{dx}(\log_a u)=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$

Derivada de funciones Trigonométricas

Ejemplo 1. Calcula la derivada de la función $f(x) = sen(x^2)$

El argumento de la función trigonométrica es la expresión x^2, e decir dentro del teorema que relaciona la función seno, $f(x) = Seno(g(x)), g(x) = x^2$, Por lo tanto la derivada de la función es:

$$f(x) = 2xcos(x^2)$$

Dónde: $2x\ es\ la\ derivada\ de\ g, esto\ es\ g'(x) = 2x$

y

$$cos(x^2) es\ la\ derivada\ de\ la\ función\ original\ de\ seno$$

Ejemplo 2. Calcula la derivada de la función $h(x) = cos(3x^5 - 2x + 1)$

El argumento de la expresión trigonométrica es la expresión:

$g(x) = 3x^5 - 2x + 1;$

Por lo tanto, la derivada de la función h es:

$$g'(x) = -(15x^4 - 2)sen(3x^5 - 2x + 1)$$

Ejemplo 3. Calcula la derivada de la función $h(x) = Tan(\sqrt{x} = Tan(x^{\frac{1}{2}})$

Por lo tanto, la derivada de la función h es:

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}Sec^2(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}Sec^2(\sqrt{x})$$

Comprueba tus saberes

Actividad de aprendizaje: en hojas blancas calcule la derivada de las siguientes funciones mediante regla de derivación trigonométrica, recuerda integrarlas a tu portafolio de evidencias.

No.	Calcula la derivada	Procedimiento	Respuesta
1	$f(x) = sen(5x)$		
2	$f(x) = Sen(3x) + tan(2x)$		
3	$f(x) = tan(x^2)$		
4	$f(x) = cot(1 - 2x^2)$		
5	$f(x) = cos(\sqrt{x - 2})$		

Derivada de función exponencial

Ejemplo 1. Calcula la derivada de la función $f(x) = e^{(-5x-3)}$
El argumento de la función exponencial es el exponente $5x - 3$,
Por lo tanto, $g(x) = 5x - 3$, la derivada de la función es:

$$f'(x) = 5e^{(5x-3)}$$

Ejemplo 2. Calcula la derivada de la función $f(x) = e^{cos(4x)}$
El argumento es una función trigonométrica, se utiliza la derivada de la función Coseno $g(x)$
La derivada queda de la siguiente manera:

$$f'(x) = -4Sen(4x)e^{Cos(4x)}$$

Ejemplo3. Calcula la derivada de la función $f(x) = e^{-x^2/2}$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{4x}{4}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Derivada de funciones logarítmicas

Ejemplo 1. Calcula la derivada de la función $f(x) =ln\, ln\, (x^4 - 3x^2 + 6)$
El argumento de la función logaritmo natural es lo que tenemos en paréntesis, esto es $g(x) = x^4 - 3x^2 + 6$

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$f(x) = \frac{4x^3 - 6x}{x^4 - 3x^2 + 6}$$

Ejemplo 2. Calcula la derivada de la función $f(x) = 3\, ln\, ln\, (sen(x^3 + 1)$
El argumento de la función es $g(x) = sen(x^3 + 1)$

Por lo tanto, la derivada de la función es:

$$g'(x) = \frac{3(3x^2) - cos(x^3 + 1)}{Sen(x^3 + 1)} = \frac{9x^2cos(x^3 + 1)}{Sen(x^3 + 1)} = 9x^2Cot(x^3 + 1)$$

Para obtener el resultado anterior se utilizó la siguiente identidad trigonométrica:

$$cot\ cot\ (x) = \frac{Cos(X)}{Sen(x)}$$

Recuerda que existen ocasiones en las cuales es conveniente aplicar las propiedades de los logaritmos antes de derivar, porque al hacerlo se facilita el cálculo de la derivada. Estas propiedades las viste en el curso de Matemáticas 4.

Propiedades de Logaritmos:

1) $Ln[(A)(B)] = Ln(A) + Ln(B)$

2) $Ln\left[\frac{A}{B}\right] = Ln(A) - Ln(B)$

3) $Ln(A^n) = n\ Ln(A)$

4) $Ln\ \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} Ln(A)$

Refuerza tu conocimiento y visita los siguientes videos alojados en la Web.

https://www.youtube.com/watch?v=wl1joYQQ3CI&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp__&index=23

https://www.youtube.com/watch?v=zcs6JXHZQtI

https://www.youtube.com/watch?v=iJEICRUgRok

Comprueba tus saberes

Actividad de aprendizaje: con el apoyo de hojas blancas calcule la derivada de las siguientes funciones mediante regla de derivación trigonométrica, recuerda integrar dicha actividad a tu portafolio de evidencias.

No.	Calcula la derivada	Procedimiento	Respuesta
1	$f(x) = Log\frac{3}{x}$		
2	$f(x) = ln\sqrt{x}$		
3	$f(x) = (\frac{x}{3})$		
4	$f(x) = \frac{1}{2}sen^2x$		
5	$f(x) = e^{-\frac{3}{x}}$		

Derivadas de Orden Superior

La derivada de orden superior se conoce como la segunda derivada de la función, es decir, si f(x) es una función y existe su primera derivada f´(x).

Notación de la Derivada de Orden Superior

$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ derivada de segundo orden

$\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ derivada de tercer orden

$\frac{d^5}{dx^5}f(x)$ derivada de quinto orden

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ derivada de n − ésimo orden

Ejemplificación

Calcula la derivada de orden 5 de la siguiente función:

$$y = \cos x$$

Tenemos que derivar tres veces para obtener la derivada de orden 3. Aquí está la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x$$

La tercera derivada de la función es:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$$

La derivada de cuarto orden es:

$$\frac{d^4y}{dx^4}4 = \cos x$$

Y Finalmente, la derivada de quinto orden es:

$$\frac{d^5y}{dx^5} = -\sin x$$

Ejemplificación

Calcula la derivada de orden 3 de la función:

$$y = e^{-x^2}$$

Para calcular la primera derivada usamos las reglas de derivación de la función exponencial y de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = -2\,xe^{-x^2}$$

Para calcular la segunda derivada tenemos que aplicar, además, la regla del producto. Definimos $u = -2x$, y $v = e^{-x^2}$. Entonces,

$$\frac{du}{dx} = -2 \qquad \text{y} \qquad = -2\,xe^{-x^2}$$

Ahora, sustituimos en la regla para derivar el producto de dos funciones:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4\,x^2 e^{-x^2} - 2\,e^{-x^2}$$

La derivada de tercer orden se obtiene derivando de nuevo. Para eso, definimos: $u = 4\,x^2$, y $v = e^{-x^2}$, por lo que ahora:

$$\frac{du}{dx} = -8\,x \qquad \text{y} \qquad = -2\,xe^{-x^2}$$

Ahora, sustituimos para terminar:

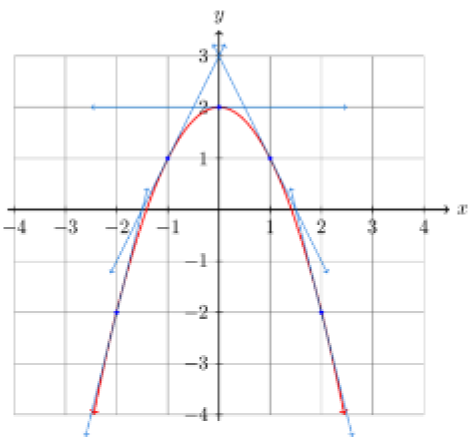
$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} &= (4\,x^2)\cdot\left(-2\,xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)\cdot(-8\,x) + 4\,xe^{-x^2}\\ &= -8\,x^3 e^{-x^2} - 8\,xe^{-x^2} + 4\,xe^{-x^2}\\ &= \left(-8\,x^3 - 8\,x + 4x\right)e^{-x^2}\end{aligned}$$

Con lo que terminamos

Ahora haremos un paréntesis para entender qué representa la segunda derivada. Esto, a su vez, nos permitirá entender qué representan las derivadas de orden 3, 4, etc.

Primero debemos recordar que la derivada es una razón de cambio instantánea, es decir, la primera derivada nos dice si la función está creciendo o decreciendo en un punto. Por ejemplo, cuando estudiamos la parábola $y = 2 - x^2$ encontramos que la derivada de la función es positiva para valores de x negativos y negativa para valores de x positivos. En otras palabras, la función es creciente a la derecha y decreciente a la izquierda.

Pero observa que la pendiente de las rectas tangentes (es decir, el valor de la derivada de la función evaluada en el punto de tangencia) va disminuyendo cada vez más, porque la primer tangente que se dibujó tiene mayor pendiente que la segunda, y ésta a su vez tiene una pendiente mayor a la siguiente y así sucesivamente, hasta que llegamos a $x = 0$, donde la pendiente es cero y la recta



tangente a la parábola es horizontal. A partir de ahí la pendiente se hace negativa y sigue decreciendo, o en otras palabras, crece con signo negativo.

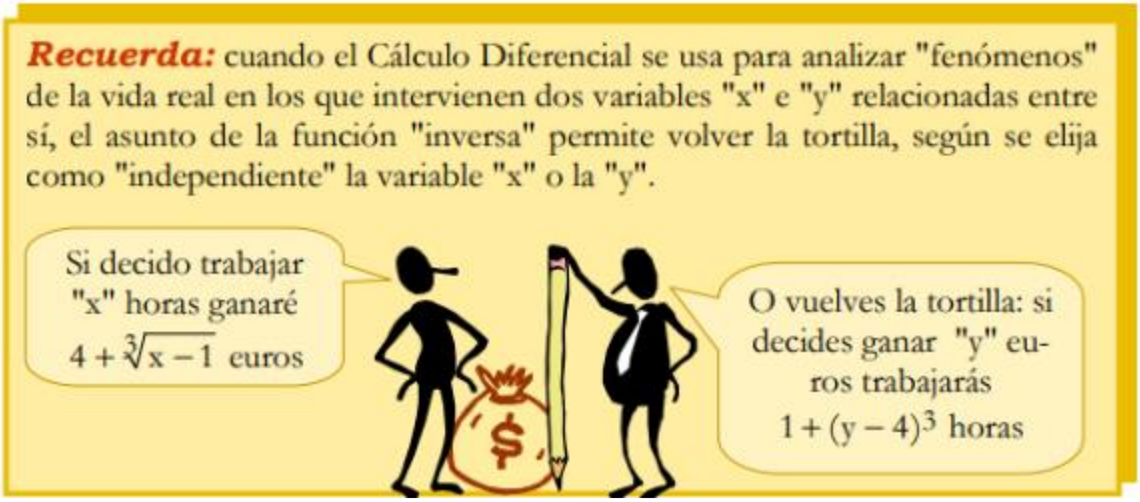
La primera derivada de esta función es: $y' = -2x$. La segunda derivada es: $y'' = -2$. Esto nos dice que la primera derivada tiene una razón de cambio instantánea constante e igual a -2. Esto nos indica que la pendiente de la recta tangente (el valor de la primera derivada) cambia en -2 unidades cada vez que x aumenta 1 unidad. Observa la recta tangente a la función en $x = -1$. ¿Puedes decir cuánto vale la pendiente de esa recta?

Ahora, compara ese valor con la pendiente de la recta tangente en $x = 0$. Y después, compara este valor con la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 1$. El valor de la pendiente del siguiente punto de tangencia lo obtienes sumando -2 al anterior, y esto es así porque la segunda derivada nos dice cómo cambia la primera derivada. A su vez, la tercera derivada nos dice cómo cambia la segunda derivada, y así sucesivamente.

Comprueba tus saberes

Con el apoyo de hojas blancas calcular la derivada del orden que se te indica. Recuerda integrar esta actividad en el portafolio de evidencias.

No.	Función	Calcula la derivada
1.-	$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$	De orden 3
2.-	$g(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$	De orden 2
3.-	$f'''(x)$ si $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{2}{5}} + x$	De orden 3



Aplicación de las derivadas

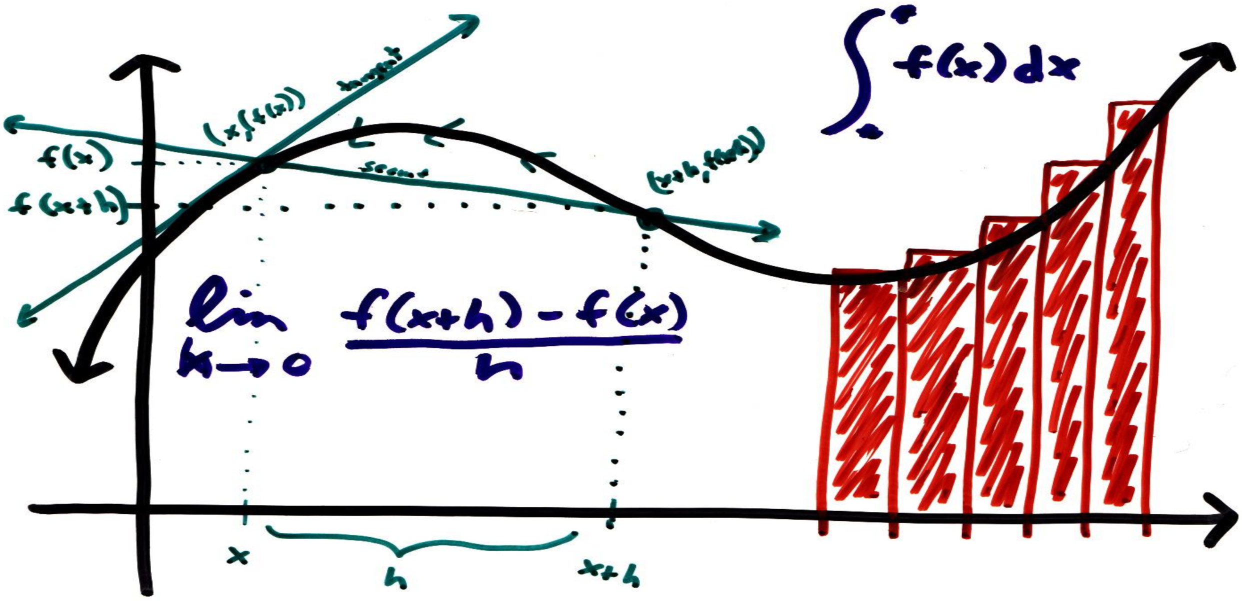
https://www.youtube.com/watch?v=MdKOjS8-oNw

En los siguientes links encontraras la ecuación diferencial de la propagación el coronavirus y puedes aplicar un experimento en tu escuela.

https://www.youtube.com/watch?v=-PUT0hZiZEw

https://www.youtube.com/watch?v=hV82KVcjf-E

Bloque III: Aplicaciones de la derivada



Bloque III: Aplicaciones de la Derivada

En este bloque III lo que se busca es que los jóvenes de bachilleres comprendan que la derivada tiene una gran variedad de aplicaciones. Se puede estudiar valores de máximos y mínimos de una función, así como su concavidad y su punto de inflexión. Asimismo, dentro de este bloque se aborda problemas de optimización relacionados con tu entorno que consiste en maximizar las utilidades y minimizar los costos cuando una persona tiene o hace un negocio. Finalmente en este bloque se aborda la regla de L´Hopital que se aplica para salvar indeterminaciones en los diversos límites: ∞/∞.

Propósito del bloque

Utiliza las reglas de derivación para resolver situaciones reales o hipotéticas del medio que lo rodea, favoreciendo con ello la construcción de nuevos conocimientos y afrontando los retos que se le presenten.

Introducción a la aplicación de la derivada

El concepto de derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello, es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología.

La derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando tratamos de funciones reales de variable real puesto que nos indica la tasa de variación de la función en un instante determinado o para un valor determinado de la variable, si ésta no es el tiempo. Por tanto, la derivada de una función para un valor de la variable es la tasa de variación instantánea de dicha función y para el valor concreto de la variable.

Un aspecto importante en el estudio de la derivada de una función es que la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo. Así pues, cuanto mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto, mayor es la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto.
Además de saber calcular la derivada de una función en un punto, es conveniente ser capaz de determinar rápidamente la función derivada de cualquier función. La derivada nos informará de con qué celeridad va cambiando el valor de la función en el punto considerado. Esta sección está dedicada precisamente a aprender tanto a calcular el valor de la derivada de una función en un punto como a saber obtener la función derivada de la original.

Finalmente, veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo (máximo rendimiento, mínimo coste, máximo beneficio, mínima aceleración, mínima distancia, etc.).

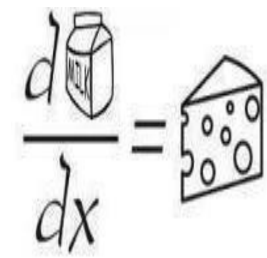
Conceptos claves.

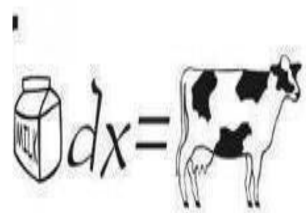
- Máximos y mínimos y puntos de inflexión de una función
- Optimización
- Velocidad, aceleración y rapidez de un móvil
- Regla de L´Hopital.

Humor con las derivadas.

El día de hoy hubo una reunión de derivadas y al momento de llegar a un acuerdo la constante dijo: a mí no me tomen en cuenta porque yo soy nada, en otras palabras, soy igual a cero.

= 0





Había una vez tres hermanas u, v y w estaban merendando cuando u dijo: hermanas es momento de sumarnos para salir como siempre victoriosas en el nuevo proyecto que ya antes habíamos conversado, pero v dijo, a mí réstame u porque yo ya no entraré al equipo.

= + -

Un día venía del trabajo x cuando observó a una hermosa n, entonces x le dijo un piropo cuando n iba pasando: princesa si tú y yo nos multiplicamos te llevaría al cielo con esa gran belleza.

$= nx^{n-1}$

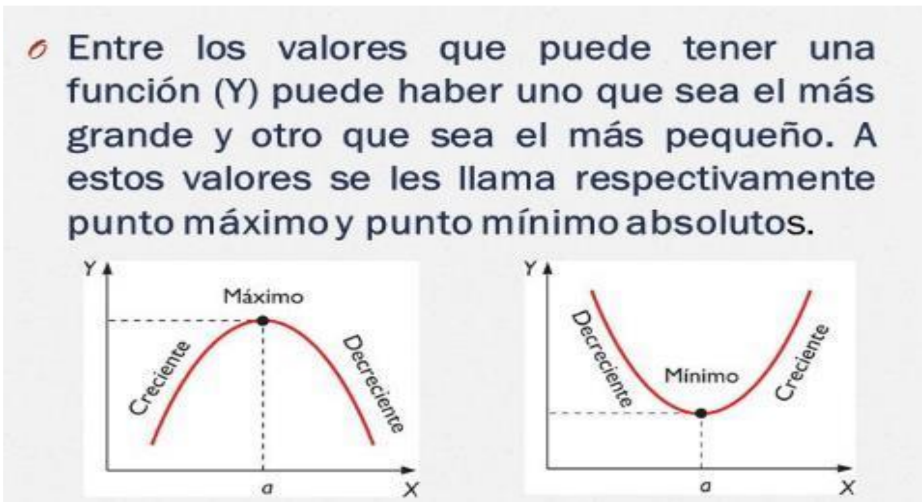
Estaban las derivadas discutiendo y de pronto x le dice a la c: tú y yo no podemos estar juntas porque siempre terminamos discutiendo así que lo mejor es que nos separemos para evitar conflictos entre nosotras.

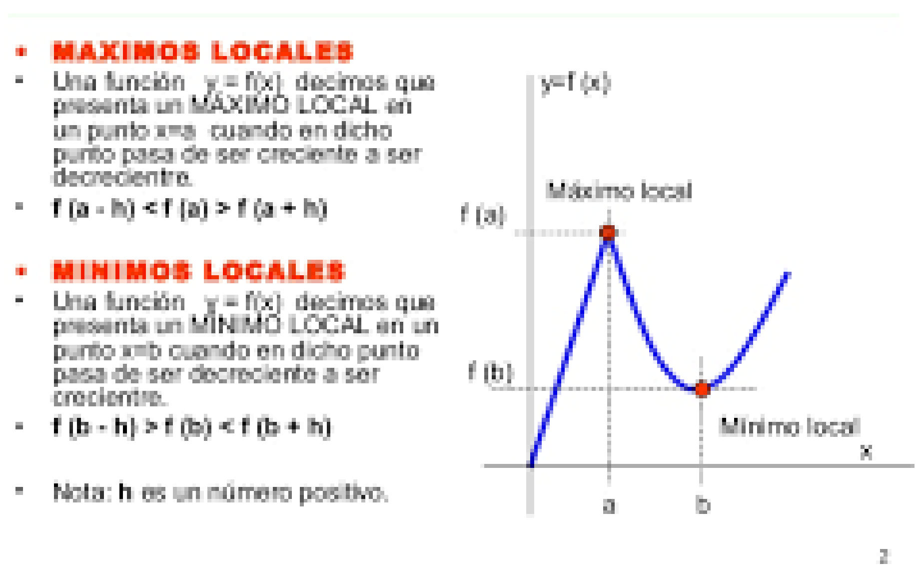
(dx^dc)f(x)= c(dx^d)x

__Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de una función__

Los máximos o mínimos de una función conocidos como extremos de una función son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región en particular de la curva (extremo local) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global o absoluto).

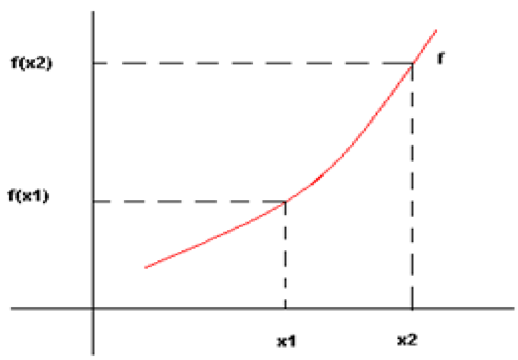
Para comprender mejor te invito a observar las siguientes ilustraciones:





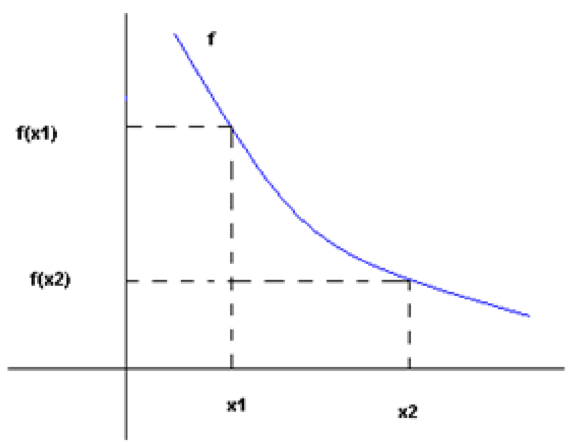
Funciones crecientes y decrecientes

Comienza analizar si las funciones son crecientes o decrecientes y observa cómo es que la pendiente o derivada en cada punto de las gráficas.



f es creciente

Es una función en la cual x crece también lo hace en y. Su **derivada o pendiente** siempre es **positiva.**



f es decreciente

Es una función en la cual, si x crece, y decrece. Su **derivada o pendiente siempre es negativa.**

Cálculo de máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera derivada

Criterio de la primera derivada para calcular los máximos y mínimos relativos de una función.

1. Calcular la derivada de $y= f(x)$
2. Igualar a cero la derivada de $y= f(x)$ y resolver la ecuación, estas soluciones se llaman valores críticos
3. Analizar el signo de dy/dx un valor antes y otro después de cada valor crítico sin omitir alguno de ellos:

a) Si la derivada de $y= f(x)$ cambia de (+) a (-), se trata de un máximo

b) Si la derivada de $y= f(x)$ cambia de (-) a (+), se trata de un mínimo

c) Si no hay cambio de signo, no es ni máximo ni mínimo.

4. elaborar la gráfica correspondiente.

Observa detenidamente el proceso de solución, este te ayudará a resolver problemas similares.

Ejemplo:

Calcular los máximos y mínimos de la función $\mathbf{y= x^3-6x^2+9x}$ y después graficar.

Primer Paso: derivar la $y= x^3-6x^2+9x$

$y' = 3x^2-12x+9$

Recuerda siempre tener presente las siguientes fórmulas para poder derivar de forma eficaz.

Segundo Paso: igualar a cero y resolver la función.

$3x^2-12x+9 = 0$

En este caso se tiene que aplicar la factorización, por lo tanto:

$3(x-3)(x-1)=0$

Enseguida, despejas los valores de x, para ello, se vuelve a igualar a cero.

$x-3 = 0$	$x-1= 0$
$x=3$	$x=1$

Tercer Paso: evalúa f(a) y f(b), luego, se analizan los valores críticos.

$X_1= 3$, por tanto **$y= x^3-6x^2+9x$**

$f(3) = x^3-6x^2+9x$

$f(3) = (3)^3-6(3)^2+9(3)$

$f(3) = 27-54+27$

$f(3) = 54-54$

$f(3)= 0$

si x<3, por ejemplo 2.9, entonces:

y= $3(x-3)(x-1)=$

y= $3(2.9-3)(2.9-1)= -$

si x>1, por ejemplo 3.1, entonces:

y= $3(x-3)(x-1)=$

y= $3(3.1-3)(3.1-1)= +$

$X_1= 1$, por tanto **$y= x^3-6x^2+9x$**

$f(1) = x^3-6x^2+9x$

$f(1) = (1)^3-6(1)^2+9(1)$

$f(1) = 1-6+9$

$f(1)= 10-6$

$f(1) = 4$

si x<1, por ejemplo 0.9, entonces:

y= *3(x-3)(x-1)=*

y= *3(0.9-3)(0.9-1)= +*

si x>1, por ejemplo 1.1, entonces:

y= *3(x-3)(x-1)=*

y= *3(1.1-3)(1.1-1)= -*

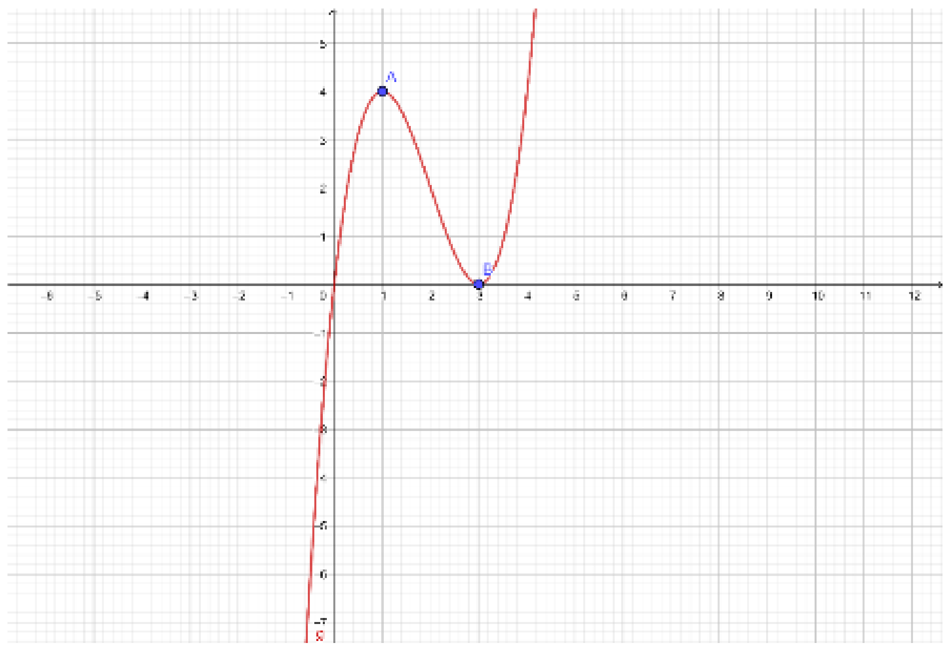
Cuarto Paso: ahora, a realizar la gráfica.

Recuerda que puedes emplear el Software Geogebra solamente abrir Geogebra y escribir la función

y= x^3-6x^2+9x

los puntos críticos (1,4) y (0,3)

y obtendrás la gráfica correspondiente.

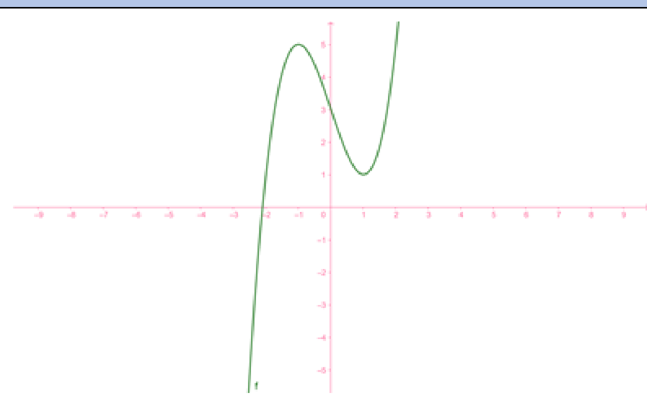


Comprueba tus saberes

En hojas blancas realiza los procesos necesarios para completar las celdas en cada una de las siguientes situaciones. Al concluir deberás integrarlas a tu portafolio de evidencias.

1. $y = x^3 - 3x + 3$

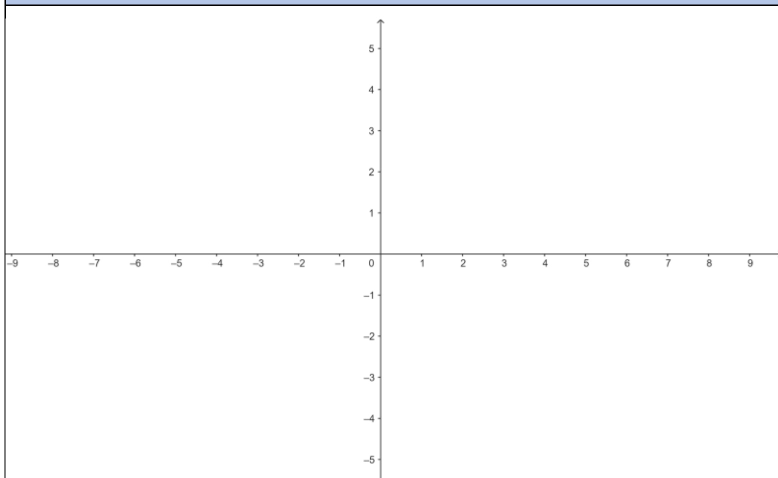
Deriva la función	Iguala la derivada a	Escribe los valores críticos

<table>
<tr><td rowspan="4">Analiza los valores críticos</td><td>Máximos</td><td>Mínimos</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
</table>

2. $y = x^4 - 4x^2$

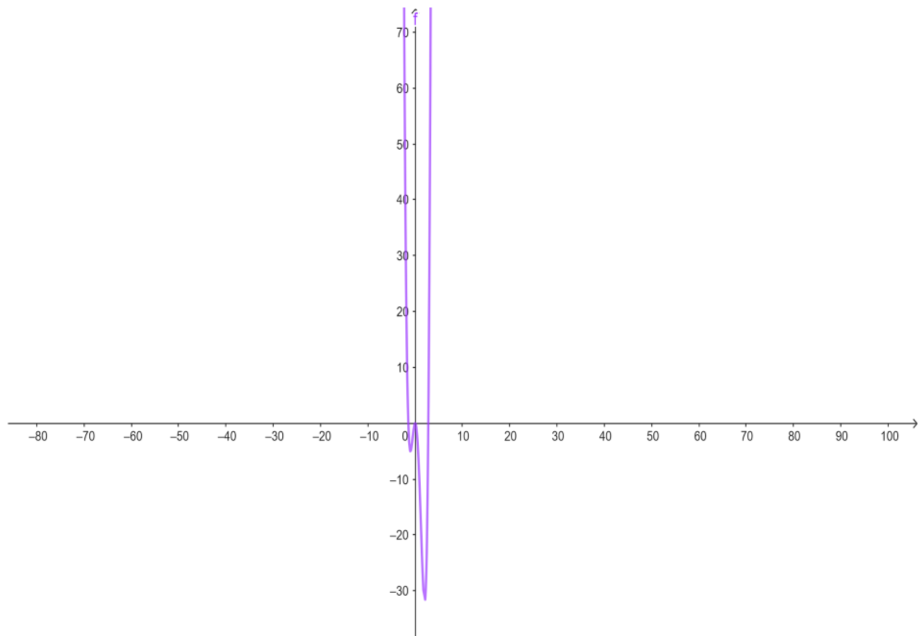
Deriva la función	Iguala la derivada a	Escribe los valores críticos

Analiza los valores críticos	Máximos	Mínimos
	Gráfica	



3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

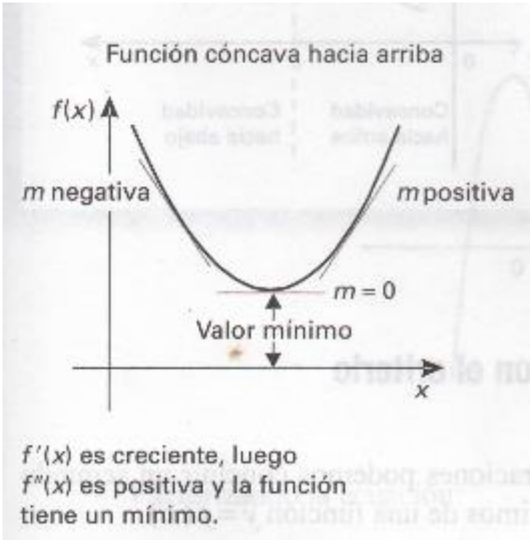
<table>
<tr><td>Deriva la función</td><td colspan="2">Iguala la derivada a</td><td colspan="2">Escribe los valores críticos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Analiza los valores
cos</td><td colspan="2">Máximos</td><td>Mínimos</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Gráfica</td></tr>
</table>

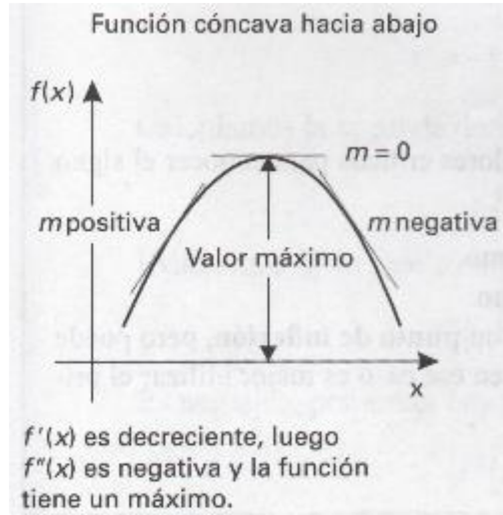


Concavidad y punto de inflexión

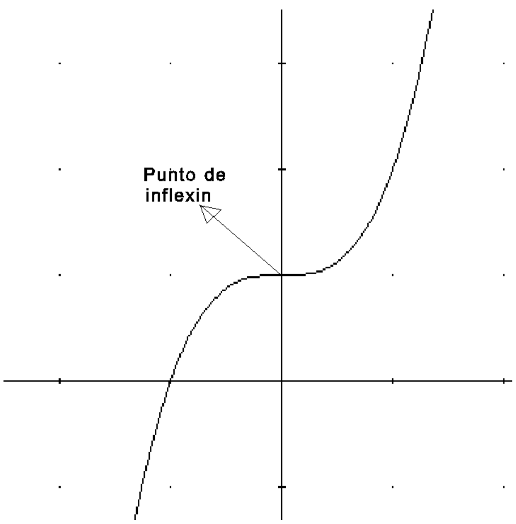
Concavidad de una curva

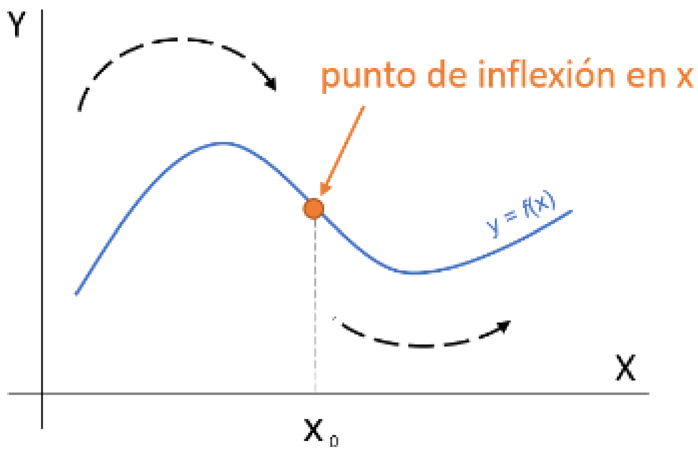
Cuando recorremos una curva de izquierda a derecha y la tangente de esta gira en cada punto en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se dice que la curva es la curva cóncava hacia arriba; si gira en sentido de las manecillas del reloj, entonces, **es curva cóncava hacia abajo.** La derivada de una función **con concavidad hacia arriba es creciente**. Por lo tanto, su segunda derivada es positiva. Si la concavidad es hacia abajo, **la primera derivada es decreciente y su segunda derivada es negativa.**





Es importante tener presente que un cambio de concavidad se encuentra en un **punto de inflexión**.





Cálculo de máximos y mínimos con el criterio de la segunda derivada

Si analizamos y sintetizamos las ilustraciones anteriores podemos concluir un segundo método para calcular los máximos y mínimos de una función y= f(x).

Para determinar los puntos críticos (máximos y mínimos) realice el siguiente algoritmo:

1. Calcula la primera derivada
2. Encontrar los valores críticos

3. Determinar la segunda derivada

4. Evaluar la segunda derivada en cada uno de los valores críticos para conocer el signo de éste

a) Si f´´(x) es negativa, la función tiene un máximo
b) Si f´´(x) es positiva, la función tiene un mínimo
c) Si f´´(x) es cero o no existe, generalmente es un punto de inflexión, pero puede ocurrir que exista un mínimo, y en ese caso es mejor utilizar el primer criterio.

5. Elaborar la gráfica correspondiente.

Observa detenidamente el proceso de solución, este te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Encuentra los valores máximos y mínimos de f(x) = $1/3\,x^3$-x^2-3x+4

Primer Paso: aplicar la primera derivada.

f´(x) = $1/3\,x^3$-x^2-3x+4

f´(x)= = $1/3(3)x^2$-2x-3, si observas hay un 3 que multiplica y otro que divide, por lo consiguiente quedará de la siguiente forma:

f´(x)= = x^2-2x-3

Segundo Paso: encontrar los valores críticos, para ello se debe igualar a cero.

Al observar la función f´(x)= x^2-2x-3=0 se puede observar que está compuesta por tres términos y por la cual se puede aplicar la factorización para poder obtener valores críticos. En este caso, se aplica el factor común.

$f´(x)= x^2-2x-3=0$

$x^2-2x-3=0$

Al factorizar queda así:

$(x-3)\ (x+1) = 0$

Enseguida, despeja “x”

$x-3 = 0$ $x+1=0$

$x=3$ $x=-1$

Tercer Paso: determinar la segunda derivada.

$f´(x)= x^2-2x-3$

$f´´(x)= \mathbf{2}x-2$

Cuarto Paso: evaluar f´´(x) en x=-1, se obtiene:

$f´(x)= \mathbf{2}x-2$

$f´(-1)= 2(-1)-2$

$f´(-1)= \mathbf{-}2-2$

$f´(-1)= -4$

Es negativa, por lo tanto, hay un máximo en x= -1

Ahora, hay que evaluar f´´(x) en x=3, se obtiene:

$f´(3)= 2(x)-2$

$f´(3)= 2(3)-2$

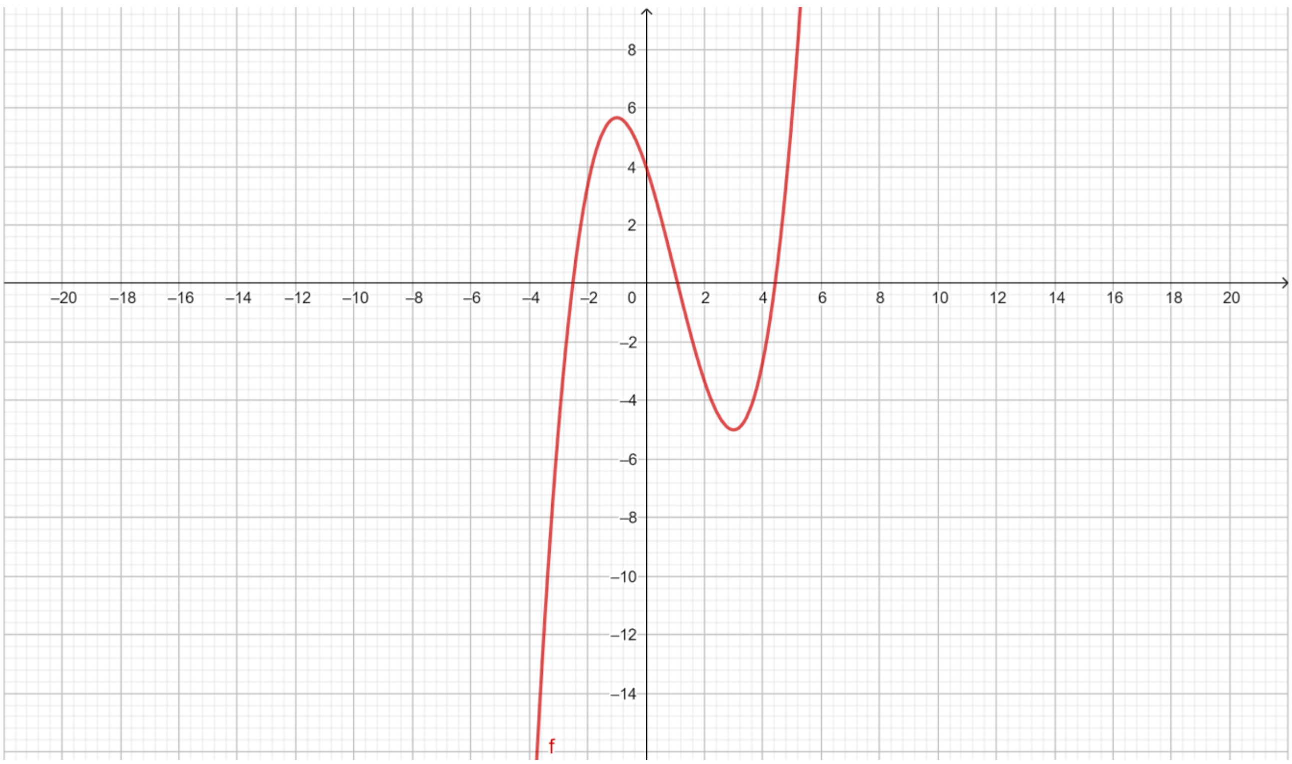
$f´(3)= 6-2$

$f´(3)= 4$

Es positiva, por lo tanto, hay un mínimo en x=3

El producto de dos binomios con un término común es un trinomio cuyo término es el cuadrado del primer término común, su segundo término es el producto de la suma de los términos no comunes por el término común, y el tercer término es el producto de los términos no comunes.

Quinto Paso: elaborar la gráfica de dicha función con el Software Geogebra.



2. Analiza la curva *y*= $\mathbf{x^4 - 4x^3}$ y verifica la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales.

Primer Paso: determinar la primera derivada.

$y = x^4 - 4x^3$

$y' = 4x^3 - 12x^2$

Segundo Paso: calcular los valores críticos.

Al factorizar quedará:

$4x^2 (x-3) = 0$

$4x^2 = 0$ $\qquad\qquad$ $x-3 = 0$

$4x^2 (x-3) = 0$ $\qquad\qquad$ $x=3$

$4x^2 = 0$

$x^2 = 0/4$

$x^2 = 0$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{0}$

$X=0$

Tercer Paso: determinar la segunda derivada y los valores críticos.

$y' = 4x^3-12x^2$

$y'' = 12x^2-24x$

$12x (x-2) = 0$

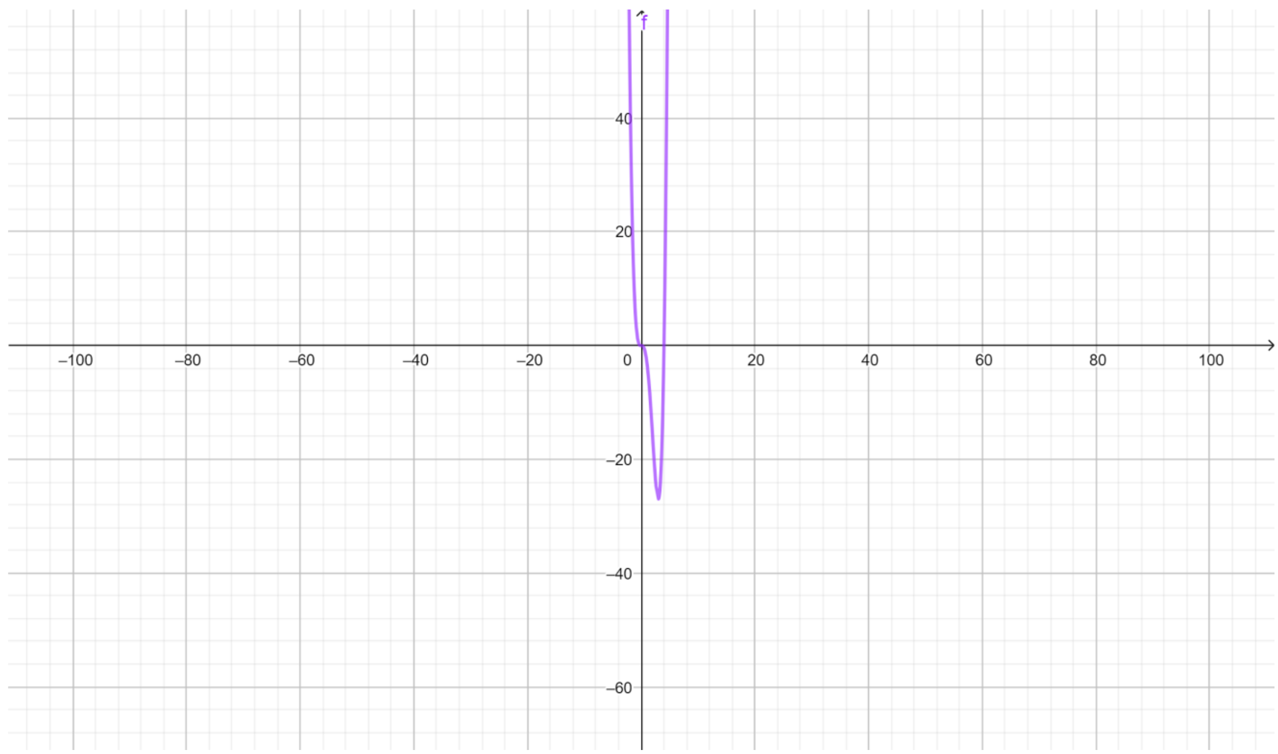
Cuarto Paso: si evaluamos la segunda derivada en X=3, tenemos:

$f''(3)= 12(3)(3-2)$

$f''(3)= 36(1)$

$f''(3)= 36>0$

Quinto Paso: elaborar la gráfica correspondiente:



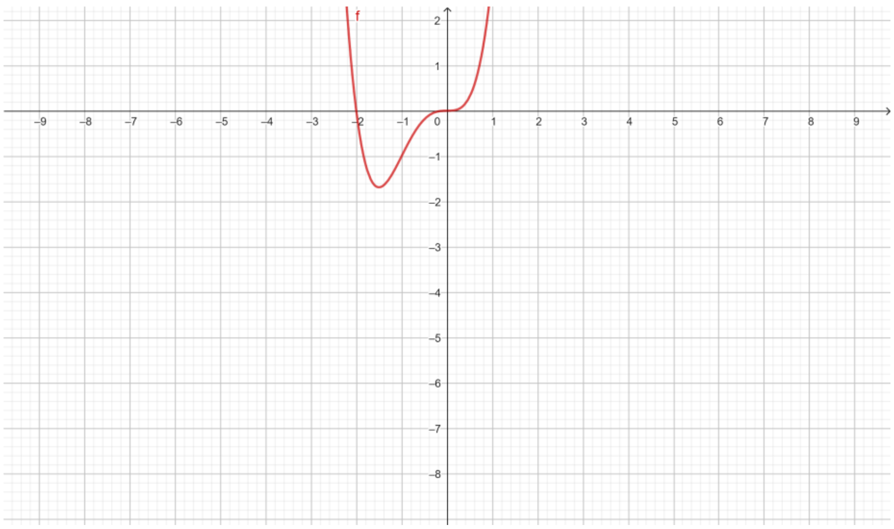
Significa que en el punto (3, -27) existe un mínimo local. Observa también que la segunda derivada en x= 0 y x=2 es igual a cero, por lo tanto, allí hay dos puntos de inflexión porque hay continuidad y las concavidades de la gráfica se comportan de la siguiente manera:

Intervalo	y´´= 12x(x-2)	Concavidad
X<0	Positiva	Hacia arriba
0 < X< 2	Negativa	Hacia abajo
x>2	Positiva	Hacia arriba

Comprueba tus saberes

Pon en acción tus conocimientos y resuelve los ejercicios en hojas blancas y recuerda anexarlas al portafolio de evidencias.

1. Encuentra los máximos y mínimos de $y= x^3-3x+4$
2. Analiza la curva $f(x)= x^4+2x^3$ y verifica la concavidad puntos de inflexión, máximos y mínimos, corrobora que corresponde a la gráfica.



3. Analiza fenómenos relacionados con la física que presentan variaciones a través del tiempo, plantea modelos matemáticos para interpretar y realiza su representación gráfica con la ayuda del Software Geogebra. Por último, determina los máximos y mínimos absolutos y relativos. (Esta actividad debe de ir en el portafolio de evidencias).

Optimización (aplicaciones de máximos y mínimos)

Una persona que hace negocios desea maximizar sus utilidades y minimizar sus costos. De esta manera, se resuelven diversas situaciones de diseño de figuras geométricas para maximizar su área o volumen, o minimizar gastos, distancias y tiempos.

Antes de entrar al tema a profundidad, realiza la siguiente actividad

Forma equipos de tres integrantes e investiguen en fuentes electrónicas confiables el último informe del clima mundial. Analicen las gráficas, identifiquen máximos y mínimos y finalmente respondan las siguientes interrogantes.

a) Desde el punto de vista histórico, ¿son normales los valores extremos que se han observado en el clima últimamente?

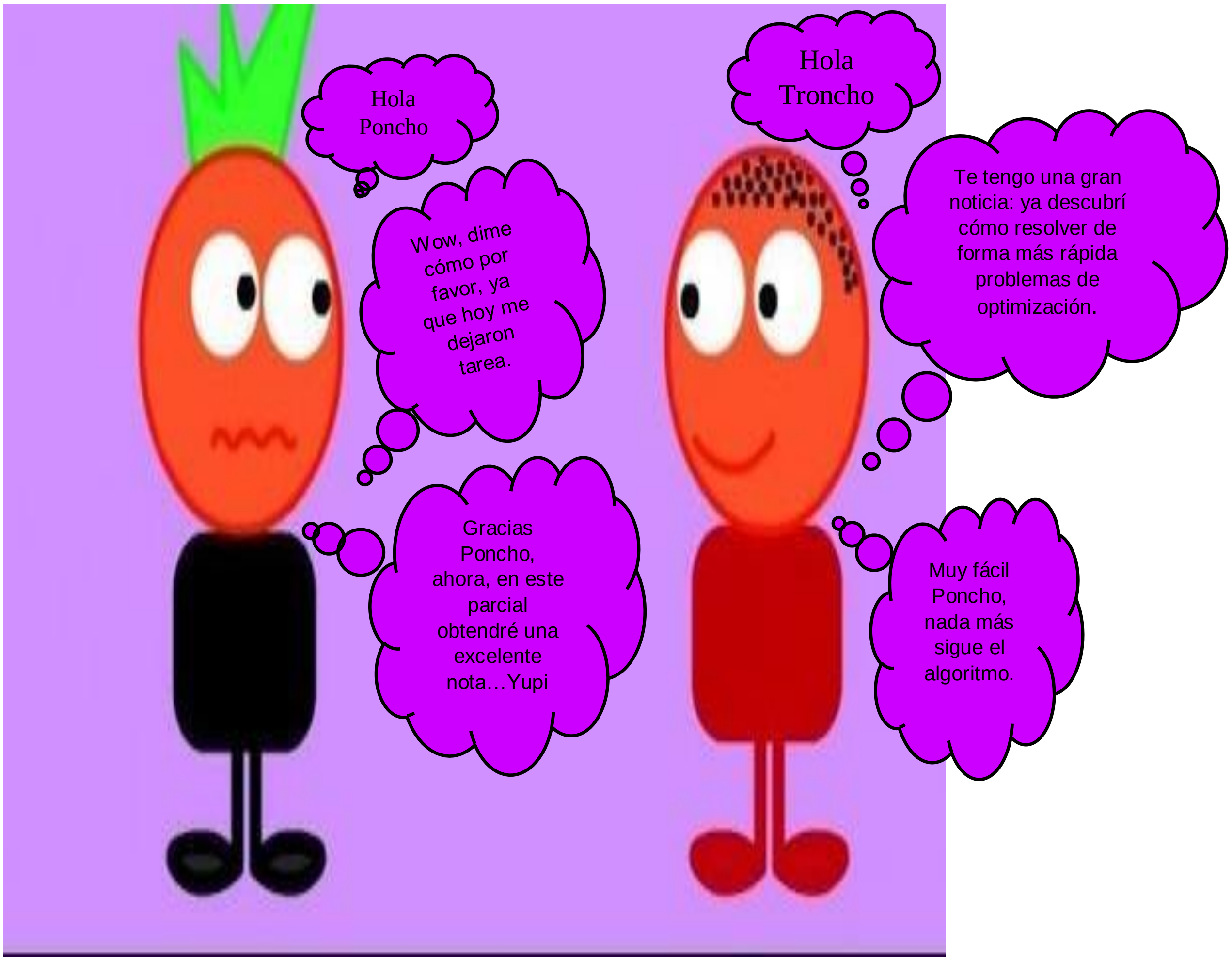
b) ¿Cómo es la tendencia de la temperatura del planeta tierra en los últimos 50 años?

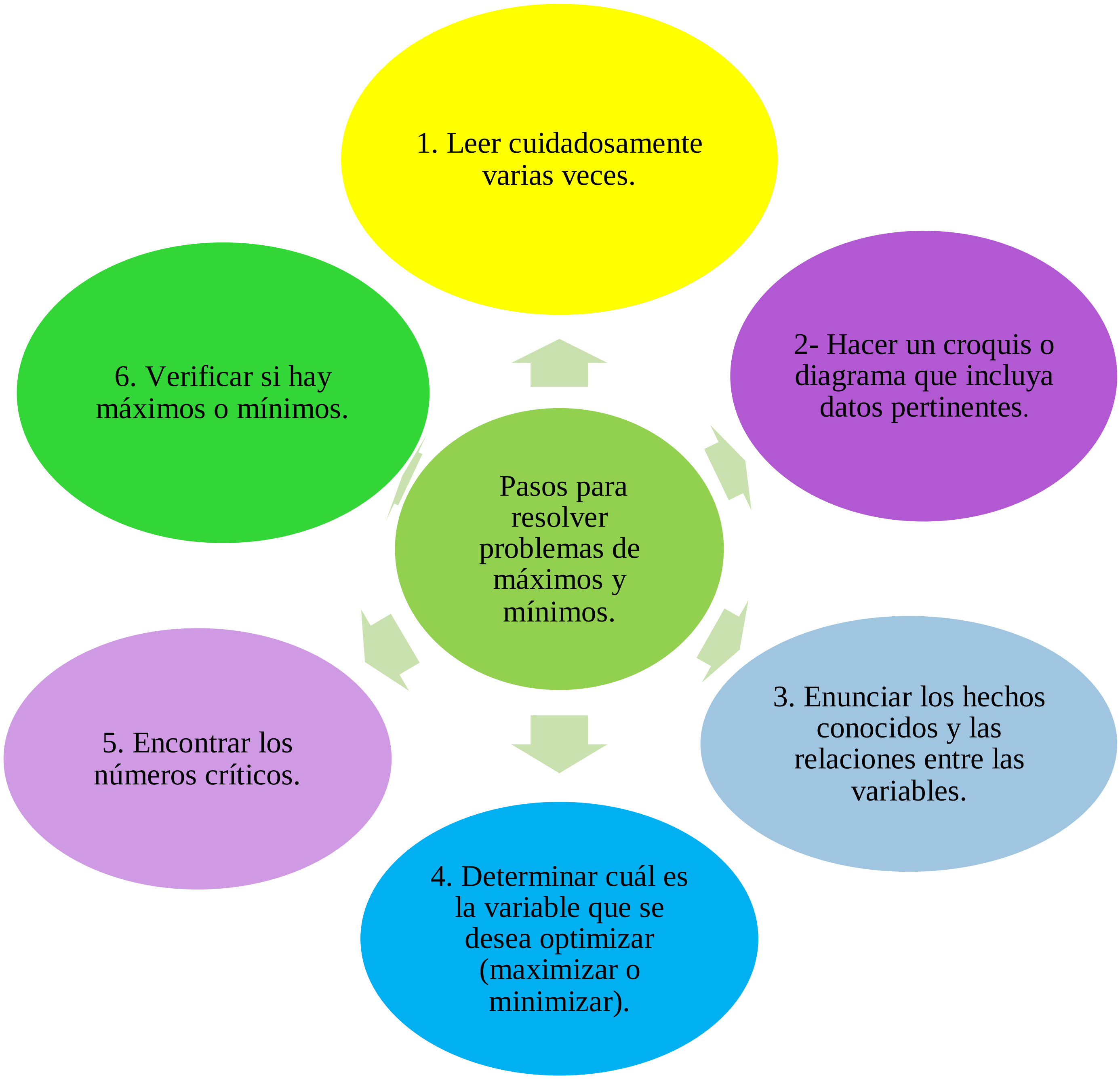
c) ¿Qué responsabilidad tenemos los seres humanos para disminuir el ritmo del calentamiento global?

d) Identifica los elementos de tu entorno que sufren modificaciones derivado de las variaciones en el clima. Elabora una lista de sus características y consecuencias antes y después del cambio.

e) Finalmente, elaboren un tríptico en donde plasmen las características, consecuencias y medidas de prevención del clima.

Aplicación de máximos y mínimos con el apoyo de Troncho y Poncho





Para reforzar tus conocimientos se te sugiere visitar:

https://www.youtube.com/watch?v=GIJICO14iXc

1. Se quiere construir una caja cerrada con base cuadrada empleando $400cm^2$ de material. ¿Qué dimensiones debe tener dicha caja para que su volumen sea máximo?

$A= x^2$

$V= x^2 h$

Como la caja debe de estar cerrada, observa la siguiente figura.

Entonces, su área total es:

Área: área de la base + área de la tapa+ área de las cuatro superficies laterales.

$A= x^2 + x^2 +4xh$

$A=2x^2 + 4hx$

Si bien recuerdas, el área total es $400cm^2$

Por lo tanto:

$2x^2 +4xh = 400$

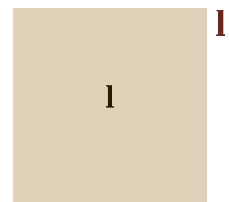
Enseguida, despejar a "h"

$4xh =400-2x^2$

$h= (400-2x^2)/4X$

$h= (200 -x^2)/2X$

Para calcular el área de un



A= (l)(l). Como se desconoce el valor de los lados, se representa de esta forma: (x)(x), que es el área de la base de la caja. Entonces, para hallar el volumen: "el área de la base por la altura".

$\underline{x^2} + \underline{x^2}$ +4xh son términos semejantes. Por lo tanto:

$x^2 + x^2 = 2x^2$

Después de despejar a “h” se debe calcular el volumen.

$V= x^2 h$

$V=x^2 (200 -x^2)/2X$

$V=x (200 -x^2)/2X$

$V= (200X –x^3)/2$

$V=100X –x^3 /2$

Enseguida, se deriva y se iguala el resultado del volumen.

$V´=100X –x^3 /2$

$V´=100-3x^2 /2$

$V =100–3x^3 /2= 0$

$100–3x^2 /2 = 0$

Luego, se despeja a “x”

$3x^2 /2 =100$

$3x^2 =200$

$X^2 =200/3$

$\sqrt{X^2} =\sqrt{66.67}$

$X= 8.165$

Como la caja es cuadrada, todos sus lados tienen las mismas medidas.

Comprobación:

$2x^2 +4xh = 400, x=8.165$

Sustituir $x= 8.165$ en $2x^2 +4xh = 400$

$2(8.165)^2+4(8.165) (8.165) = 400$

$2(66.66) +266.66 = 400$

$133.32+266.66 = 400$

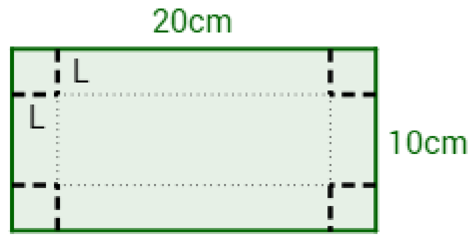
399.98 =400

Se redondea:

400 = 400

De esta manera, se comprueba que es correcto ya que el área de la caja es de 400 cm^2

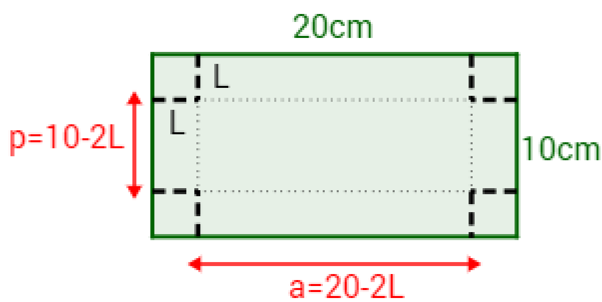
3.-Se quiere construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de 20x10cm. Para ello, se corta un cuadrado de lado L en cada esquina y se dobla la hoja levantando los cuatro laterales de la caja.



Determinar las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo si el lado (L) debe medir entre 2 y 3 cm.

Si (a) es el ancho de la caja, (h) es su altura y (p) es su profundidad, entonces su volumen es

$$V = a \cdot h \cdot p$$



Al cortar los cuatro cuadrados de lado (L), el ancho de la caja es:

$$a = 20 - 2L$$

La profundidad es:

$$p = 10 - 2L$$

Por último, la altura coincide con el lado del cuadrado recortado:

$$h = L$$

Paso uno: luego, el volumen de la caja en función de (L) es:

$$
\begin{aligned}
V(L) &= (20 - 2L) \cdot (10 - 2L) \cdot L = \\
&= (200 - 40L - 20L + 4L^2) \cdot L = \\
&= (200 - 60L + 4L^2) \cdot L = \\
&= 200L - 60L^2 + 4L^3
\end{aligned}
$$

Paso dos: derivamos la función volumen:

$$V'(L) = 200 - 120L + 12L^2$$

Paso tres: igualamos a 0 la derivada y resolvemos la ecuación para encontrar los puntos críticos:

$$
\begin{aligned}
&V'(L) = 0 \quad \rightarrow \\
&200 - 120L + 12L^2 = 0 \rightarrow \\
&L = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} 7.89 \\ 2.11 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Paso cuatro: situamos los puntos en la recta real y estudiamos los signos en los intervalos.

Escogemos los puntos (x=1) del primer intervalo, (x =3) del segundo intervalo y (x=8) del tercero:

$$V'(L) = 200 - 120L + 12L^2$$

$$
\begin{aligned}
V'(1) &= 200 - 120 + 12 = \\
&= 92 > 0 \\
V'(3) &= 200 - 120 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 = \\
&= -52 < 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V'(8) &= 200 - 120 \cdot 8 + 12 \cdot 8^2 = \\
&= 8 > 0
\end{aligned}
$$

Luego, la función es creciente en el primer intervalo, decreciente en el segundo y creciente en el tercero.

Por tanto, las dimensiones de la caja deben ser:

$$
\begin{aligned}
a &= 20 - 2 \cdot 2.11 = \\
&= 15.78cm \\
p &= 10 - 2 \cdot 2.11 = \\
&= 5.78cm \\
h &= 2.11cm
\end{aligned}
$$

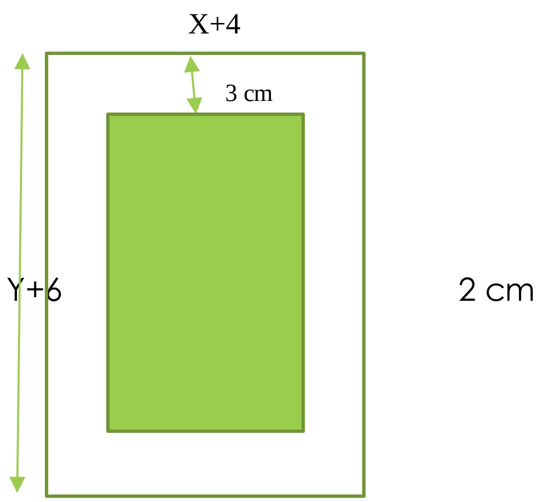
Es decir, las dimensiones son 15.78 x 5.78 x 2.11 cm y su volumen es 192.45 cm².

Comprueba tus saberes

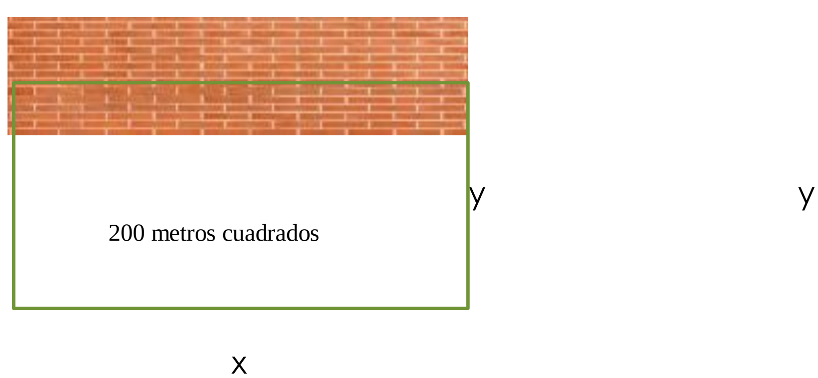
Ahora, te corresponde poner en práctica tus conocimientos.

A continuación, resuelve de forma correcta los siguientes problemas en hojas blancas para anexarlos posteriormente a tu portafolio de evidencias.

1.- Las páginas de un libro deben contener un área impresa de 216 cm2, con imágenes superior e inferior de 3cm y márgenes laterales de 2cm (observa la figura). Encuentra las dimensiones de la página para que su área total sea mínima.



2.- Una pequeña huerta de 200m^2 ha de ser cercada para protegerla de los conejos. Hallar las dimensiones que requieren la menor cantidad de cerca si un lado de la huerta está protegido por una construcción. Observa la siguiente figura.



Aplicaciones a la economía

Antes de abordar los ejemplos de la aplicación de la derivada en la economía, vamos a definir los siguientes conceptos:

- **Función de costo C(x).** Es el costo de producir x unidades de cierto producto.
- **Costo marginal.** Es la razón de cambio C(x) respecto a x, es decir, la derivada C´(x) de la función de costo.
- **Costo promedio.** Es el costo por unidad cuando se producen x unidades.

$$C(x)=\frac{C(x)}{x}$$

- **Función de ingreso total.** Es la venta de x unidades al precio por unidad o función de demanda o función de precio p(x), entonces, el ingreso total es:
  R(x) = xp(x)
- **Función de ingreso marginal**. Es la derivada R´(x) de la función de ingreso.
- **Utilidad total P(x).** Si se venden x unidades de un producto, la utilidad total se obtiene mediante la expresión:
  P(x) = R(x)-C(x)
- **Función de utilidad marginal**. Es la derivada P´(x) de la función de utilidad total.

Observa detenidamente el proceso de solución, esto te ayudará a resolver problemas similares.

1.- Una compañía estima que el costo en dólares para producir x artículos es:

$C(x) = 1000+ x +0.0004x^2$

a) Encuentra el costo, el costo promedio y el costo marginal para producir 100 artículos.

El costo de producir **100** artículos es:

Para ello sustituyes el número de artículos que se produce en la función:

$C(x) = 1000+x+0.0004x^2$

$C(100)= 1000+100+0.0004(100)^2$

$C(100)= 1000+100+ (0.0004)(10000)$

$C(100)= 1000+100+4$

$C(100)= 1104$ dólares.

La función del costo promedio.

$C(x) = 1000+x+0.0004x^2$

$C(x)= \frac{C(x)}{x}$ (recuerda que es el resultado obtenido del costo de producir 100 artículos).

$C(100)= \frac{1104}{100}$

C)100) = 11.04 dólares por artículo.

La función de costo marginal es la derivada de $C(x) = 1000+x+0.0004x^2$ y por lo consiguiente, quedará de la siguiente manera:

$C(x) = 1000+x+0.0004x^2$

$C'(X) = 0+1+2(0.0004)\,x$

$C'(X) = 1 + 0.0008x$

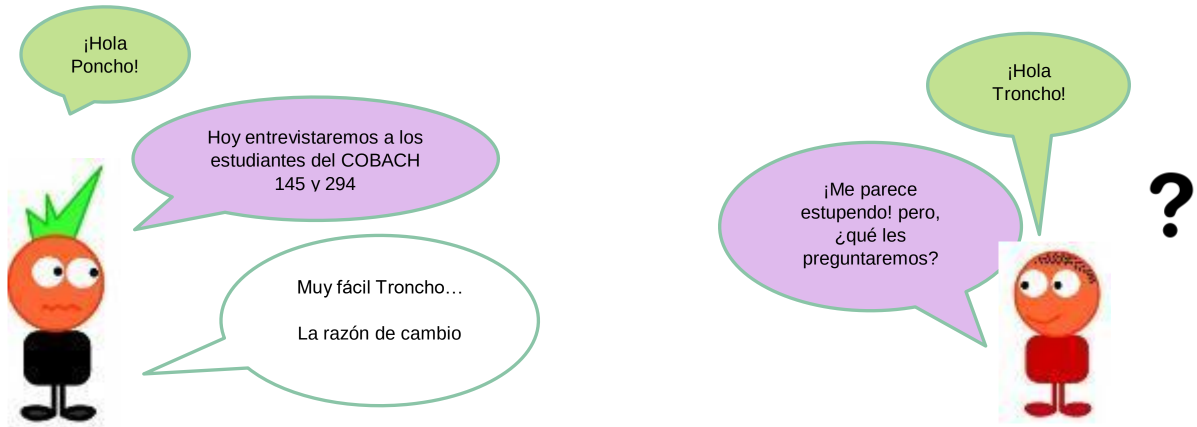
Por tanto: $C'(100) = 1 + 0.0008x$

$C(100) = 1 + 0.0008(100)$

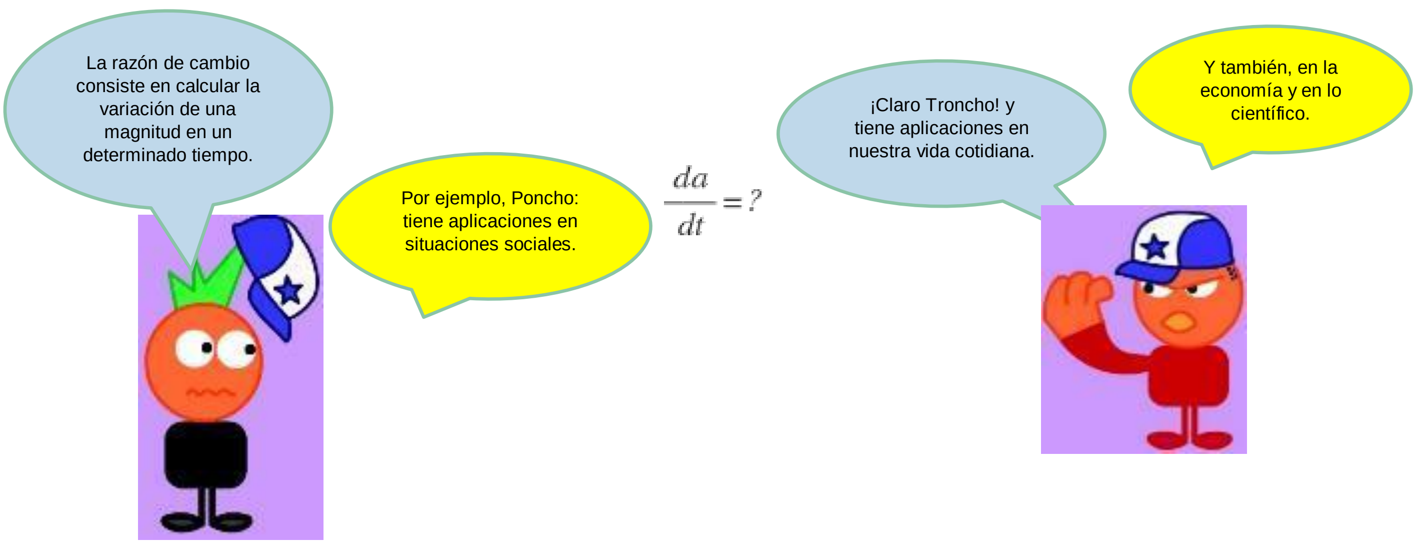
$C'(100)= 1+0.08$

$C'(100) = 1.08$ dólares por artículos.

La velocidad como razón de cambio (Troncho y Poncho)



Al terminar la entrevista con los estudiantes de bachillerato, Troncho y Poncho llegaron a una sola conclusión.

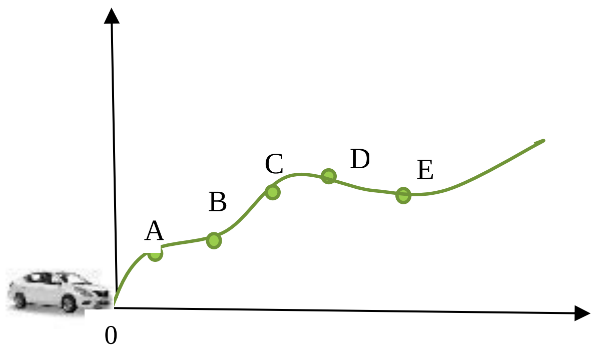


$$\frac{da}{dt} = ?$$

La velocidad como razón de cambio

Comprueba tus saberes

Observa la gráfica de la posición de un automóvil y responde en hojas blancas de forma correcta las siguientes preguntas (recuerda anexarlas al portafolio de evidencias).



Recuerda que cuando un objeto o automóvil está sin movimiento se halla en reposo.

1. ¿Cuál es la velocidad inicial del automóvil?
2. ¿Dónde es mayor la velocidad, en B o C?
3. ¿En dónde desacelera el automóvil?

En binas realicen el siguiente experimento:

Lancen una pelota al aire, midan el tiempo y la distancia recorrida por el balón en pequeños intervalos de tiempo y en un tiempo determinado. Realicen un modelo matemático que determine el movimiento y elaboren un bosquejo y la gráfica correspondiente en hojas blancas (anexarlas al portafolio de evidencias).

Razones de cambio

La velocidad es una razón de cambio. Se sabe que viajando por carretera la distancia entre San Cristóbal y Tuxtla Gutiérrez es: **La rapidez** (la magnitud de la velocidad). Cuando en el lenguaje corriente decimos que la velocidad de un objeto es de 10m/seg sin especificar la dirección, en realidad nos estamos refiriendo a la rapidez.

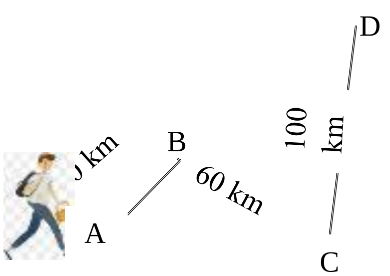
1. Supongamos que mi amigo Javier viajó de San Cristóbal a Tuxtla Gutiérrez, recorrió 86 km en un lapso de una hora y 15 minutos. La velocidad promedio es:

$$V = \frac{86 \text{ km}}{1\,\tfrac{1}{4}\text{ h}} = \mathbf{68.8\ km/h}$$

En general, la velocidad promedio es el cociente de la distancia recorrida entre tiempo transcurrido.

$$\textbf{velocidad promedio} = \frac{\textbf{distancia recorrida}}{\textbf{tiempo transcurrido}} = \frac{\triangle d}{\triangle t}$$

2. Un viajero salió cierto día a la 13:00 h de la ciudad A, llegó a la ciudad B a las 13:30 h y siguió hacia la ciudad C a la cual llegó a las14:30 h, sin detenerse continuó su camino y llegó a la ciudad D a las 16:30 h (todo el mismo día).



a) ¿Cuál fue su velocidad promedio entre la ciudad A y la ciudad B?

Como el viajero salió a la 13:00 h de la ciudad A y llegó a la ciudad B a la 13:30 h. Entonces, caminó 30 minutos, por lo tanto, equivale ½ h.

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{40\text{ km}}{0.5\text{ h}} = 80\text{ km/h}.$$

b) ¿Cuál fue su velocidad promedio entre la ciudad C y la ciudad D?
En este caso, de la ciudad C a D lo hace en 2 horas, por lo tanto:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{100\text{km}}{2\text{ h}} = 50 \text{ km/h}$$

c) ¿Cuál fue su velocidad promedio en todo el recorrido realizado?
La distancia total que recorrió el viajero: 40km+60km+100km = 200km y el tiempo que recorrió fue de: 0.5 h+1h+2h= 3.5 h

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{200\text{km}}{3.5\text{ h}} = 57.14 \text{ km/h}$$

Aplicación de la derivada como razón de cambio

Es posible calcular la velocidad y la aceleración de un móvil a partir de su posición aplicando las reglas para derivar.

Observa detenidamente el proceso de solución de los siguientes problemas:

1. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación en movimiento $S(t)= t^3-2t+1$ donde x se mide en metros y t en segundos. Encuentra la velocidad instantánea cuando t= 1.5 s.

Primer Paso: derivar la función: $S(t)= t^2-2t+1$
$S´(t)= 3t^2-2$

Segundo Paso: sustituir a t después de la derivada.
$S´(1.5)= 3(1.5)^2-2$
$S´(1.5)= 3(1.5)^2-2$
$S´(1.5)= 3(2.25)-2$
$S´(1.5)= 6.75-2$
$S´´(t)=6t$

Recuerda que la primera derivada es la velocidad y la segunda derivada es la aceleración.

Continuando con el problema, ahora se hallará el valor de la aceleración. Para ello, se obtiene la segunda derivada.
$S´(t)= 3t^2-2$

Al aplicar la segunda derivada se obtiene:
$S''(t)=6t$

Finalmente, se sustituye e t=1.5 en la segunda derivada.
$S''(t)=6t$
$S''(1.5)=6(1.5)$
$S''(1.5)= 9\ m/s^2$

2. Una lancha se mueve de tal manera que su función con respecto al tiempo en segundos está definida por $s(t)= 4t^2+2t+5$
   a) **Determina en qué momento su velocidad es igual a 58 m/s**.

Primer Paso: derivar $s(t)= 4t^2+2t+5$
$S'(t)= 4t^2+2t+5$
$s(t)= 8t+2$
Segundo Paso: se debe igualar y despejar a t (tiempo para hallar el valor del tiempo.
58= 8t+2 (puede aplicar la propiedad conmutativa).
$8t+2 =58$
$8t= 58-2$
$8t=56$
$t\ \frac{56}{8} = 7s.$

Tercer Paso: sustituye el t =7s. en la derivada $S(t)= 8t+2$
$S(t)= 8t+2$
$S(1.5)= 8(1.5)+2$
$S(1.5)= 12+2$
$S(1.5)= 14m/s$

   b) Determina su aceleración en ese momento.
Para determinar la aceleración se debe de derivar según ocasión.
$S'(t)= 8t+2$

Primer Paso: derivar:

$S''(t)= 8$
Segundo Paso: se determina el resultado de la aceleración.

$a= 8m/s^2$

3. Una motocicleta avanza de acuerdo a la expresión $s(t)= 6t^3-4t^2+2t$. Encuentra su velocidad cuando su aceleración es igual a $64m/s^2$.

Primer Paso: derivar $s(t)= 6t^3-4t^2+2t$
$S'(t)= 18t^2-8t+2$ = **velocidad**
Segundo Paso: se aplica la segunda derivada.
$S'(t)= 18t^2-8t+2$
$S''(t)= 36t-8$
Tercer Paso: igualar.
$64 = 36t-8$ (aplica la propiedad conmutativa).
$36t-8 = 64$
Despeje t
$36t = 64+8$
$t\frac{72}{36} =2s$ = tiempo
Cuarto Paso: calcula la velocidad, para ello se toma la primera derivada.
$S'(t)= 18t^2-8t+2$ sustituya t= 2s
$S'(2)= 18(2)^2-8(2)+2$
$S'(2)= 18(4)-16+2$
$S'(2)= 72-16+2$
$S'(2)= 74-16$
$S'(2)= 58m/s$

Comprueba tus saberes

Galileo Galilei, quien descubrió que en el vacío (sin resistencia ni fricción del aire) los cuerpos caen con la misma velocidad, caen al mismo tiempo. Para profundizar más: https://www.youtube.com/watch?v=xAbwbwP7bkE

Para reforzar tus conocimientos resuelve los problemas que se te presentan en hojas blancas y recuerda anexarlas a tu portafolio de evidencias.

1. Una bala disparada hacia arriba desde la superficie de la tierra puede alcanzar una altura de $s(t)= 83t^2-16t$ pies después de t segundos.
   a) ¿Cuánto tiempo tardará la bala para alcanzar su punto más alto?
   b) ¿Cuál es su aceleración?

2. La ecuación de una partícula es $s(t)= t^2-3t$, donde s está en metros y t en segundos. Encuentra:

a) La velocidad y la aceleración después de 1.5 segundos

b) La aceleración cuando la velocidad es cero.

3. La ecuación de una partícula es s(t)= $16t^{2+6}t+12$, donde s está en metros y t en segundos. ¿Cuál es la velocidad y aceleración de la partícula en 3 segundos?

Regla de L´Hópital

Dice que se puede salvar indeterminaciones de los límites:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ = 0/0 o la de ∞/∞.

Para eliminar las indeterminaciones se debe de derivar tanto el numerador como el denominador cuantas veces sea necesario para obtener un valor.

Observa los siguientes ejemplos paso a paso:

a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 2x - 3}$$

Recuerda hay que derivar hasta obtener un valor:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 1}{5x^2 + 2x - 3}$$

Al derivar quedará:

Lim $\frac{4x}{10x+2}$ pues al sustituir el valor de x dará ∞. Por lo tanto, se debe volver a derivar

X → ∞

Al derivar por segunda vez resultará lo siguiente:

$\frac{4x}{10x+2}$ $\frac{4}{10}$

c) $\frac{6x^2+4x}{e^x+2}$

Primer Paso: ver si existe indeterminación. Para ello, se sustituye el valor de x.

$\frac{6(\infty)^2+4(\infty)}{e^\infty+2}$ $\frac{\infty}{\infty}$, como existe una indeterminación, entonces se obtiene la primera

derivada:

Segundo Paso: derivar $\frac{6x^2+4x}{e^x+2}$

$\frac{6x^2+4x}{e^x+2}$

$\frac{12x+4}{e^x}$ $\frac{\infty}{\infty}$, al realizar las operaciones resulta una indeterminación. Entonces, se vuelve a obtener la derivada (segunda derivada).

Tercer Paso: derivar $\frac{12x+4}{e^x}$ $\frac{12x+4}{e^x}$ $\frac{12}{e^x}$ $\frac{12}{e^\infty}$ $\frac{12}{\infty}$ = 0

d) $\frac{senx}{x}$ $\frac{sen0}{0}$ $\frac{0}{0}$, pues al evaluar da una indeterminación por lo tanto se debe de aplicar la **regla L´Hopital.**

$\frac{senx}{x}$ $\frac{cosx}{1}$ $= \frac{coscos\,0}{1}$ $\frac{1}{1}$ =1

Recuerda que todo número que tenga como denominador infinito tiende a cero, por ejemplo, el ejercicio que se halla a lado izquierdo.

El 12 se llama numerador

El ∞ es el denominador

Por lo consiguiente, el valor del límite es = 0

Finalmente, debes tener a la mano tu formulario de derivadas.

Comprueba tus saberes

Es momento de poner en práctica sus saberes.

Transcribe los siguientes ejercicios en hojas blancas y calcula los siguientes límites aplicando la regla de L´Hopital (Anexarlas a tu portafolio de evidencias).

1) $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x}{2x^2 + 1} =$$

2)

3) $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \ln(1+x)}{1 - \cos x}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{5x-3}$

Autoevaluación

Considera tu desempeño como estudiante y anota la frecuencia con que ocurre la acción que se describe, anota en el cuadro el número correspondiente.

 0 nunca  5 algunas veces  10 siempre

Competencias a desarrollar	
Al finalizar el bloque adquiriste las competencias que te permiten:	
Construir e interpretar modelos matemáticos de un móvil en un tiempo determinado y calcular máximos y mínimos absolutos y relativos.	
Interpretar, analizar y argumentar que al realizar el pequeño experimento lanzando una pelota al aire, midiendo el tiempo y la distancia recorrida por la pelota en pequeños intervalos de tiempo y en tiempo determinado.	
Interpretar y analizar y argumentar que la segunda derivada de una función es igual a la aceleración de un móvil en la resolución de problemas de física en el contexto de tu vida cotidiana.	
Valorar el uso de las TIC en el modelo y simulación de situaciones problemáticas de fenómenos físicos, económicos, industriales y emites juicios de opinión.	
Calcular máximos y mínimos de funciones algebraicas e interpretar los máximos relativos y puntos de inflexión en gráficas que modelan la resolución de problemas.	
Plantear modelos matemáticos en problemas de física que describen variaciones en el tiempo, realizar la representación gráfica en el Software Geogebra, calcular máximos y mínimos absolutos y relativos.	

Glosario

Abscisa. Una de las dos coordenadas rectilíneas que fijan la posición de un punto en el plano.

Aceleración. Es una magnitud derivada vectorial que nos indica la variación de velocidad por unidad de tiempo.

Álgebra. Ciencia que tiene por principal objeto simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números. Esto se consigue utilizando letras para designar los números que se buscan; las reglas operacionales se eligieron para que siguieran el mismo patrón que en aritmética ordinaria con el empleo generalizado del número negativo.

Amplitud. De un intervalo (a, b).

Aproximación. Evaluación o cálculo empírico con resultado inexacto, pero lo suficientemente cercano al real para considerarse suficiente.

Asíntota. Línea recta que prolongada indefinidamente se acerca de continuo a una curva, sin llegar a encontrarla nunca.

Cálculo Diferencial. Rama de las matemáticas que trata de las unidades de cambio en las cantidades variables. En el cálculo diferencial se consideran solamente los incrementos en las cantidades variables; se antepone a ellas el símbolo "d", lo que significa un incremento.

Coordenadas. Se le llama coordenada a la pareja (x, y) que determina la distancia que un punto guarda en relación con los ejes de coordenadas rectilíneas o cartesianas. La x se define como la abscisa y es la distancia ortogonal que dicho punto guarda con el eje de las Y, y la coordenada "y" representa la distancia ortogonal que el punto guarda con respecto al eje X.

Curva. Línea o trayectoria que se desvía constantemente de su dirección y no contiene ninguna posición de línea recta. Es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas que ocupa un punto que se traslada con arreglo a una determinada ley;

por lo tanto, es una figura geométrica determinada por un sistema de coordenadas y la expresión gráfica de la variación que experimenta una magnitud en función de otra u otras, de cuya definición se desprende que una recta es un caso particular de curva.

Derivación. Es la operación con la que se encuentra la derivada de una función.

Discontinuo. Magnitud que varía por saltos y no gradualmente.

Exponente: Un exponente es una expresión algebraica o un simple **número** que denota la **potencia** a que se debe elevar otra expresión u otro número (la base).

Función, derivada de una. Es la tendencia de una función al acercamiento a un valor dado de la variable independiente. Existen varias fórmulas para derivar.

Funciones implícitas. Son implícitas cuando su dependencia con la variable independiente no se encuentra en forma de ecuación resuelta, como es: $5xy - 2y = 8$, en este caso "y" es una función implícita de x.

Funciones, valores críticos de las. Se llaman valores críticos a los valores en los que una función encuentra un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, éstos se localizan derivando la función e igualando a cero. Los valores de que satisfacen a f'(x) se llaman valores críticos.

Límite de una función. Es el valor al que tiende el resultado de la operación cuando la variable tiende a un valor predeterminado. Como es decir que el límite de f(x) cuando x tiende a "a" sea k.

Máximo. Límite superior de una cosa. Valor mayor de una cantidad variable entre ciertos límites.

Optimización. En matemáticas e informática, método para determinar los valores de las variables que intervienen en un proceso o sistema para que el resultado sea el mejor posible.

Términos semejantes. Son aquellos que tienen la misma parte literal, o, dicho de otra forma, aquellos que tengan las mismas letras y con igual exponente.

Trascendentes. Ecuaciones y funciones que no se pueden representar por expresiones algebraicas, porque intervienen en ellas logaritmos, funciones trigonométricas o ecuaciones en las que el exponente es la variable.

Variable dependiente. Magnitud que en una relación o función depende del valor que se les asigne a otras variables.

Variable independiente. Magnitud que no depende de otra para obtener su valor.

Velocidad: Es una magnitud física que expresa la relación entre el espacio recorrido por un objeto, el tiempo empleado para ello y su dirección.

Bibliografía

Cuellar, J. A. (2016). Matemáticas V: Cálculo Diferencial. México: MCGRAW-HILL; Edición 1era.

Granville, W. A. (2009). Cálculo Diferencial e Integral. En Cálculo Diferencial e Integral (pág. 708). México: LIMUSA.

(s.f.). James Stewart. En Cálculo diferencial e integra. México: Thomson.

Jimenez, M. R. (2011). Matemáticas V Cálculo Diferencial. México: PEARSON; Edición 2da.

Leithold, L. (1998). El Cálculo. México: Oxford University Press, Séptima edición.

Rosa María Jiménez, M. R. (2019). Cálculo Diferencial . México : PEARSON; Edición 2da.

youtube . (5 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=GIJICO14iXc

youtube. (8 de diciembre de 2020). Obtenido de http://www.youtube.com/watch?v=-WSwexo5UpY

youtube. (15 de diciembre de 2020). Obtenido de https://youtu.be/eCB_Jr_VKyg

youtube. (5 de enero de 2021). Obtenido de http://www.youtube.com/watch?v=2Me3kN4Ezog

youtube. (12 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc

youtube. (18 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=uK4-s0ojHFg&list=PLeySRPnY35dG2UQ35tPsaVMYkQhc8Vp

youtube. (20 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=sWm4l86WvPo

youtube. (18 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=xx6bIjehplA

youtube. (4 de enero de 2021). Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=_6-zwdrqD3U yuotube. (6 de enero de 2021). Obtenido de http://www.youtube.com/watch?v=GIJICO14iXc