COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS

CHIAPAS
GOBIERNO DEL ESTADO

GUÍA DIDÁCTICA
MATEMÁTICAS FINANCIERA I

Guía Didáctica
Matemáticas Financieras I

Presentación

El Colegio de Bachilleres de Chiapas a través de la Dirección Académica presenta guías didácticas como herramientas de aprendizaje y enseñanza para sus planteles escolarizados y Centros de Educación Media Superior a Distancia.

La presente guía de Matemáticas Financieras I fue elaborada por un grupo de docentes que presentan temas de calidad para la asignatura, con la finalidad de proporcionar apoyo bibliográfico para los alumnos que cursan el paquete económico-administrativo, además de lograr aprendizajes esperados y motivarlos en el aprendizaje autogestivo.

A través de la lectura, análisis y resolución de problemas de distintos libros de Matemáticas Financieras, se logró realizar una selección de información y ejemplos que se integraron en el presente compendio, mismos que están vinculados con las competencias y objetos de aprendizaje de los bloques de la asignatura de Matemáticas Financieras I.

Es un material de fácil acceso que les será de utilidad a los alumnos para dar respuesta a la información que solicite el docente para la asignatura de Matemáticas Financieras I.

El cuerpo colegiado que realizó esta guía te invita a utilizarla de manera concienzuda para que logres tus metas de estudio.

Directorio

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS
DIRECCIÓN ACADÉMICA
SUBDIRECCIÓN DE DESARROLLO ACADÉMICO
DEPTO. DE FORMACIÓN Y SEGUIMIENTO A LA ACADEMIA

Elaborado por:

Mtro. Julio César Solís Sánchez
Docente del plantel 20 20 de Noviembre, Zona Centro Fraylesca
Coordinador

Mtra. Cecilia del Carmen Peralta Cruz
Docente del plantel 99 Francisco León, Zona Norte

Ing. Alexander Cancino Morales
Docente del CEMSaD 115 La Cascada, Zona Costa

Mtro. Emmanel Salinas Domínguez
Docente del CEMSaD 142 San Jerónimo Tulijá, Zona Norte

Colaboración especial:

MEH. Sofía Elvira Cordero Santos
Adscrita al Depto. de Formación y Seguimiento a la Academia

Índice

Identificación de la Guía de Matemáticas Financieras I

Objetivo General:
La asignatura de Matemáticas Financieras I tiene como propósito general el desarrollar el pensamiento lógico-matemático por medio tanto de habilidades como actitudes que favorezcan el óptimo manejo de las finanzas, en particular las personales, proporcionando herramientas y métodos pertinentes para el análisis de situaciones, así como la toma de decisiones en diferentes contextos.

Nombre de la asignatura: Matemáticas Financieras I

Programa al que pertenece: Componente de formación propedéutico del Bachillerato General

Semestre al que pertenece: Quinto Semestre

Área a la que pertenece según plan de estudios: Matemáticas

Seriación: Matemáticas Financieras II

Valor en créditos: 6

Componente: Propedéutico

Bloque 1- Fundamentos básicos de las matemáticas financieras y su aplicación

Contenido
Sesión 1.1 Exponentes y radicales.
Sesión 1.2 Propiedades de los exponentes.
Sesión 1.3 Tanto por ciento.

Introducción
El bloque I maneja las nociones y conceptos básicos de las matemáticas financieras, así como sus elementos, técnicas y aplicaciones que permiten el uso de un lenguaje propio de la asignatura.

El presente capítulo se compone de 10 sesiones, cada una diseñada para poder facilitar a los alumnos un módulo de 50 minutos cada una.

Objetivos específicos:

Identificar la aplicación de los fundamentos y conceptos matemáticos en las matemáticas financieras en situaciones reales, reconoce la ley de los exponentes, valora su aplicación, compara operaciones con fracciones y aplica el concepto del tanto por ciento, como herramientas para la solución de problemas financieros.

Competencias a desarrollar

- Elija las fuentes de información más relevantes de los fundamentos matemáticos y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y viabilidad.
- Analiza el resultado obtenido de los ejercicios de exponentes y radicales aplicando modelos matemáticos, así como uso de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).
- Argumenta la solución obtenida de un problema de los Fundamentos Matemáticos, con métodos numéricos variacionales mediante lenguaje verbal y matemático, así como el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).
- Resuelve problemas prácticos en situaciones reales de empresas financieras y mercantiles mediante procedimientos matemáticos.
- Describa los fundamentos matemáticos como prefacio a la aplicación de las diferentes situaciones reales e hipotéticas.

Interdisciplinariedad:
El presente bloque cuenta con interdisciplinariedad con la materia de informática ya que las Tecnologías de Información y Comunicación (TICs) son una de las principales herramientas para asistir al cálculo de las series y sucesiones, así como la aplicación de las mismas en el cálculo de interés compuesto.
Así mismo, con las Matemáticas aplicadas pues cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
Geografía Historia Universal contemporánea.

Transversalidad:
Eje transversal social, ambiental, de salud y de habilidades lectoras pues reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.

Conceptos clave: Manejo de operaciones matemáticas de forma manual o electrónica: razones, proporciones, porcentajes y descuentos.

Objetivo de aprendizaje
Fundamentos matemáticos.

Operaciones financieras básicas

Las cuatro operaciones básicas entre los números reales son la adición sustracción, multiplicación y división. Dados los números a y b, ellas se representan con las notaciones

$$a + b, \quad a - b, \quad a.b = axb = ab \quad y \quad \frac{a}{b} = a \div b = (si\ b \neq 0)$$

respectivamente. Estas cuatro operaciones tienen las siguientes propiedades para cualesquiera números a, b y c:

- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a + 0 = 0 + a = a$
- $a + (-a) = 0$
- $a + b = b + a$
- $a(b + c) = ab + ac$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- $a \cdot (1/a) = 1$ si $a \neq 0$
- $a \cdot b = b \cdot a$

Además, se cumplen las siguientes leyes de signos:

- $-(-a) = a$
- $(a)(-b) = (-a)(b) = -(a.b)$
- $(-a)(-b) = a.b$
- $a + (-b) = a - b$
- $(-a) \div b = a \div (-b) = -(a \div b)$
- $(-a) \div (-b) = a \div b$

Cuando una expresión involucra varias de estas operaciones, ellas se interpretan en el siguiente orden:
1. Primero se evalúan los paréntesis, si los hay.
2. En segundo lugar, multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha entre ellas.
3. En tercer lugar, adiciones y sustracciones, de izquierda a derecha entre ellas.

Ejemplo 1:
La expresión 2 − 10 × 2 no se evalúa restando primero 2 − 10 = −8: es erróneo, decir que 2−10×2 es igual a −8×2. Lo correcto es multiplicar primero y restar después:

R= 2−10×2 = 2−20 = −18

Ejemplo 2:

En (8−3) ×5, la primera operación es (8-3) =5 por estar entre paréntesis:
R= (8−3) ×5 = (5) × 5 = 25.

Ejemplo 3:

En (-8+3) ×5, la primera operación es (-8+3) =-5 por estar entre paréntesis:
R= (-8+3) ×5 = (- 5) × 5 = - 25.

Evalue

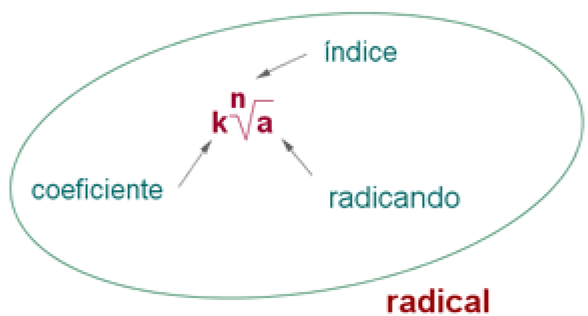
1. $-3+8$
2. $4+(-3)$
3. $-6+\frac{7}{2}$
4. $\frac{5}{3}+(-4)$
5. $11-(-2)$
6. $-9-4+6$
7. $\frac{2}{3}+2-\frac{-3}{5}$
8. $\frac{8}{3}\cdot\frac{15}{7}$
9. $-3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{-9}{8}$
10. $6+4\left(-\frac{1}{3}\right)$
11. $\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{4}$
12. $3\cdot\frac{2}{-5}+\frac{-6}{-7}\cdot\frac{1}{9}$
13. $\frac{3}{5}\div(-2)$
14. $\frac{1}{8}\div\frac{2}{7}$
15. $\frac{2}{3}\div\frac{-1}{6}+4\div\frac{1}{3}$
16. $\left(1+\frac{-5}{2}\right)\div\left(\frac{3}{2}-3\right)$
17. $4\div2\div2$
18. $4\div(2\div2)$
19. $\left[\frac{-3}{4}-\frac{3}{2}\div(-2)\right]\div7$
20. $7\div\left[\frac{-3}{2}\div(-2)-\frac{3}{4}\right]$
21. $\frac{(1/2)\div(3/4)\div(3/2)}{(1-1/3)\div(1-1/5)}$

Sesión 1.1 Exponentes y Radicales

Comparta a sus alumnos la siguiente información:

Para las matemáticas ninguna descripción del mundo estaría completa sin raíces y radicales; una aplicación sería para el caso de la obtención del interés por los tiempos de periodo que marca el pago de un préstamo u otros fenómenos tan diversos como la distancia a la que podemos ver el horizonte o la forma en que se percibe la temperatura en un día frío.

Para el caso en el que necesitemos descomponer un número en varios factores iguales a los que llamamos raíces, como el caso en el que si multiplicamos el número 4 por sí mismo cinco veces da el resultado de 1,024 decimos que 4 es la raíz quinta de 1,024 y lo podemos escribir $4 = \sqrt[5]{1{,}024}$ el pequeño número 5 a la izquierda del radical nos indica que si multiplicamos 4 por sí mismo cinco veces obtenemos 1,024, utilizando otro ejemplo de raíz es $6 = \sqrt[3]{216}$ porque 6^3=216. Al desintegrar un número en solo dos factores iguales se obtiene su raíz cuadrada, como ejemplo 6= $\sqrt[2]{36}$=36 regularmente cuando es raíz cuadrada no se especifica el índice del radical, se sobreentiende que es raíz cuadrada del número que está dentro del radical. El nombre que recibe el símbolo √ para denotar la raíz cuadrada se llama radical, el número debajo del radical es el radicando.



Aplica para escribir en forma simplificada los productos de factores que se repiten, así cuando multiplicamos o dividimos en varias ocasiones un mismo factor es conveniente emplear exponentes para reducir la notación. Por ejemplo:

(-3) (-3) (-3) (-3) = 3^4 y (2x + 1) (2x + 1) = $(2x + 1)^2$

Para el caso de considerar que, u sea un número, el producto de u por sí mismo cuatro veces se denota por U^4 , esto es (u) (u) (u) (u) = U^4 .

Cuando se tiene un producto de C^5 por C^3 equivale a multiplicar a c por si mismo ocho veces, así C^5xC^3 = C^8 si n y b son números enteros, entonces el producto de: C^n + C^b= C^{n+b}.

Como vemos podemos emplear exponentes fraccionarios para obtener diferentes raíces de un número (entero) real c al conocer que $\sqrt[n]{c}$ = $c^{1/n}$ en donde el denominador del exponente es el índice del radical, para el caso en el que exponente es negativo se presenta lo siguiente:

$c^{-1/2}\ \frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$, a≠0

Algunos ejemplos son:

a) $36^{1/2} = \sqrt[2]{36} = 6$ b) $343^{1/3} = \sqrt[3]{343} = 7$ c) $-81^{1/4} = -(\sqrt[4]{81}) = -3$

d) $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$ e) $125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = 5$

Si elevamos c^6 al cubo multiplicamos c^6 por si mismo tres veces en total se multiplicará a c por sí mismo 18 veces de esta forma:

$(c^6)^3 = c^6 x c^6 x c^6 = c^{6+6+6} = c^{18}$

Si m y n son números enteros (reales) se tienen que:

$(c^m)^n = c^m \; x \; c^m \; x \; c^m \ldots c^m = c^{m+m+m+\ldots+m} = c^{mxn}$

En este ejemplo podemos dar valores a la variable m y n, pero tenemos que tener en cuenta que para los valores de los exponentes en la multiplicación éstos se suman.

Al generalizar esta propiedad para exponentes fraccionarios el resultado es:

$(c^{\frac{1}{m}})^n = c^{\frac{1}{m}} \; x \; c^{\frac{1}{m}} \; x \; c^{\frac{1}{m}} \ldots x \; c^{1/m} = c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+1/m} = c^{\frac{n}{m}}$

Así también:

$(c^n)^{1/m} = c^{n/m}$

Cada exponente racional tiene un numerador igual a 1. Si el numerador es algún otro entero, también se multiplican los exponentes al elevar una potencia a otra. Por esa razón:

$c^{\frac{2}{3}} = \left(c^{\frac{1}{3}}\right)^2 \; y \; c^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{c^2})$, entonces: $c^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{c})^2 = (\sqrt[3]{c^2})$

Puedes observar que el denominador 3 del exponente racional o entero es el mismo que el índice del radical y el numerador 2 del exponente racional sirve como exponente en cada una de las dos formas radicales. Esto se demuestra con la siguiente definición:

La definición de $c^{n/m}\, si \sqrt[n]{c}$ representa un número real $\frac{n}{m}$ es un número racional positivo, n ≥ 2

Entonces $c^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{c}\,)^n$

También $c^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{c^n}\,)$

La finalidad de las leyes de los exponentes es resumir una expresión numérica que, si se expresa de manera completa y detallada sería muy extensa. Por esta razón es que en muchas expresiones matemáticas se encuentran expuestas como potencias.

Ejemplo 1:

9^3 es lo mismo que (9) x (9) x (9) = 729. Es decir, se debe multiplicar 9 tres veces.
De esta manera, la expresión numérica es más simple y menos confusa para resolver.

Ejemplo 2:
Se puede expresar una radical en forma de potencia como en el siguiente ejemplo:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
Ponemos en forma de potencia al 256, $256 = 2^8$
El índice del radical (2) se transforma en el denominador y el exponente del radicando (8) en el numerador y efectuamos las operaciones:
$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{8/2} = 2^4 = 16$

Ejemplo 3:
Una raíz de una multiplicación se puede separar como una multiplicación de raíces, sin importar el tipo de raíz.
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

$\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$

Ejemplo 4:
La raíz de una fracción es igual a la división de la raíz del numerador y de la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt{\frac{18}{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{216}{8}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Ejemplo 5:
Cuando dentro de una raíz hay una raíz se pueden multiplicar los índices de ambas raíces a fin de reducir la operación numérica a una sola raíz, y se mantiene el radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[2.2]{64} = \sqrt[4]{64}$$

Ejemplo 6:
Cuando se tiene dentro de una raíz un número elevado un exponente, se expresa como el número elevado a la división del exponente entre el índice del radical.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

Actividades de aprendizaje

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:
Serie de ejercicios

I.- A partir de las potencias dadas escribe las raíces correspondientes:
a) $(-7)^2$ =

b) $(-1)^5 =$

c) $(-8)^7 =$

d) $(11)^9 =$

e) $(-4)^{11}=$

2.- Halla el valor de las raíces si es posible.

a) $\sqrt{4}$ =

b) $\sqrt{16} =$

c) $\sqrt[4]{16}=$

d) $\sqrt[2]{3}$ =

e) $\sqrt[3]{64}$

Sesión 1.2 Propiedades de los exponentes

En las leyes de los exponentes están resumidas las propiedades más significativas de las potencias de *u* y *v* donde sean estos números reales, variables o expresiones algebraicas y sean *m* y *n* números enteros. En donde se supone que todas las bases son distintas de cero.

	Ley	Ejemplo
1.-	$x^1 = x$	$6^1 = 6$
2.-	$x^0 = 1$	$7^0 = 1$
3.-	$x^{-1} = 1/x$	$4^{-1} = 1/4$
4.-	$x^m x^n = x^{m+n}$	$x^2x^3 = x^{2+3} = x^5$
5.-	$x^m/x^n = x^{m-n}$	$x^4/x^2 = x^{4-2} = x^2$
6.-	$(x^m)^n = x^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$
7.-	$(xy)^n = x^n y^n$	$(xy)^3 = x^3y^3$
8.-	$(x/y)^n = x^n/y^n$	$(x/y)^2 = x^2 / y^2$
9.-	$x^{-n} = 1/x^n$	$x^{-3} = 1/x^3$
10.-	$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

Estas propiedades también son válidas para exponentes fraccionarios o negativos, aquí unos ejemplos:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Ejemplos:

$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $\qquad$ $8^{-6} = \frac{1}{8^6}$

Otros ejemplos:

$$1)\ \left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1^2}{3^2}\cdot\frac{2^3}{3^3}=\frac{2^3}{3^5}=\frac{8}{243}$$

$$2)\ \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}=\left[\frac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2}=\left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2}=\frac{(2^5)^2}{(3^2)^2}=\frac{2^{10}}{3^4}=\frac{1024}{81}$$

$$3)\left[\frac{3^2\cdot 5^{-1}}{3^3\cdot\sqrt{5}}\right]^{-2}=\left[3^{2-3}\cdot 5^{-1-\frac{1}{2}}\right]^{-2}=\left[3^{-1}\cdot 5^{-\frac{3}{2}}\right]^{-2}=3^{(-1)(-2)}\cdot 5^{\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}=3^2\cdot 5^3=1125$$

Es importante asegurarse en comprender la propiedad de los exponentes que permite mover factores de numerador a denominador y viceversa, ejemplo: $\frac{u^{-m}}{v^{-n}}=\frac{u^m}{v^n}$. También es importante aclarar que no es verdadero que las potencias de una suma o resta sean la suma o resta de la potencia.

$$(u+v)^m \neq u^m + v^m \quad y \quad (u-v)^m \neq u^m - v^m$$

A través de los siguientes ejemplos se trata de identificar la ley de los exponentes que justifica cada una de las igualdades, recordando también que las propiedades antes vistas nos ayudan a simplificar expresiones donde están presentes los exponentes.

$$a)\ (-2)^{-2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$$

$$b)\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(-\frac{3}{1}\right)^3=-\frac{3^3}{1^3}=-\frac{27}{1}=-27$$

$$c)\ -x^{-4}=-\frac{1}{x^4}$$

Actividades de aprendizaje

Realiza los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

1) $(2^2)^2$

2) $(5^2)^3$

3) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$

4) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$

5) $\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2$

6) $\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right)^2$

7) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

8) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$

9) $\frac{2^{\frac{-1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot 4^2}{2^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{-1}{4}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}}$

10) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^{\frac{-1}{2}}$

11) $\frac{3^5 \cdot 4^{-6}}{3^7 \cdot 4^{-8}}$

12) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{10}}{2^{\frac{-5}{3}} \cdot 5^{\frac{-11}{3}}}}$

13) $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{8}}$

14) $\sqrt{\frac{2^3 \cdot 5^5}{2^{-1} \cdot 5^3}} \cdot \left(\frac{2^4 \cdot 5^{-1}}{2^5 \cdot 5^{-1}}\right)$

15) $\left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \sqrt{\frac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$

Sesión 1.3. Tanto por ciento

El tanto por ciento o porcentaje hace referencia a la proporcionalidad que se establece con relación a cada cien unidades, cada vez que se dice “tanto por ciento” se hace referencia a "por cada 100"; este se expresa mediante el símbolo %. Normalmente el interés se expresa en tanto por ciento, pero en el cálculo financiero usualmente para simplificar la formulación y las operaciones se emplea el tanto por unidad monetaria o tanto por uno. Por consiguiente, si se conoce el tanto por ciento de interés basta dividirlo por 100 para obtener el tanto por uno.

Tanto por uno: 0.25
Tanto por ciento: 25%

El porcentaje puede también expresarse en forma fraccionaria sobre todo en las tasas de interés.

Es importante saber que el cálculo del porcentaje se utiliza con frecuencia en el campo comercial y financiero para representar: aumentos, disminuciones, tasas de interés y de descuento, entre otros aspectos. Además, “las ganancias en las transacciones comerciales pueden expresarse en forma de porcentaje. Las pérdidas suelen expresarse en forma de un porcentaje del precio de costo, en tanto que las ganancias pueden expresarse como porcentaje del precio de costo o de venta" (Mena y Escobar, 2017, pág. 9).

Un porcentaje es un tipo de regla de tres directa en el que una de las cantidades es 100. Gutiérrez Jiménez (2021) señala:

Un porcentaje es una expresión del tipo X% (de A), donde "X" es un número decimal y "A" una cantidad absoluta llamada cantidad de referencia. Un porcentaje indica una cantidad relativa (respecto a la de referencia) de forma que es "X" fragmentos de cien partes iguales en las que se considera dividida la cantidad "A". Por tanto, X% equivale a la "fracción" X/100.

Fórmula:

El X% de A es (X/100)A o (XA)/100

Así, por ejemplo, el 15% de 80 es 12, ya que:

(15/100)80: 0.15*80: 12
O bien, (15*80)/100= 1200/100= 12

El valor de un porcentaje es siempre relativo a la cantidad de referencia dependiendo su valor absoluto correspondiente del valor de ella.

Ejemplo 1:
1.- ¿Qué cantidad es el 20% de 1531.2?
(20/100)1531.2
(0.20) (1531.2) = 306.24

Ejemplo 2:
2.- ¿Qué cantidad es el 43% de 11,239.6?
(43/100)11,239.6
(0.43) (11,239.6) = 4,833.028

Ejemplo 3:
3.- ¿150 es el 20% de qué cantidad?
(20/100) A= 150
(20/100) = (150/A)
(20)A = (150) (100)
A= 15000/20
A= 750

4.- La caja de ahorros de Carlos le ofrece un 7% anual para los $8.200 MXN que tiene ahorrados ¿Qué interés obtendrá por su capital a final de año? Un interés del 7% anual significa que de cada $100 obtiene 7 al año.

Por tanto,
8,200 (7/100) = $574

O realizando una regla de tres simple:
$\frac{100\%}{7\%} \times \frac{8{,}200}{x}$ = (8,200 x 7) /100= 574

Serie de ejercicios

Encuentra el porciento para cada uno de los ejercicios presentados:

a) 7% de 985

b) 12.5% de 1,780

c) $3\,\frac{4}{1}$% de $ 856,520.00

d) $^{5}/_{3}$% de $22,354.30

e) Sobre una inversión de $120,340.00 se obtiene una utilidad de $30,085.00 ¿Qué porcentaje de la inversión representa dicha utilidad?

f) Un banco recupera el 89% de una demanda de $1, 239,569.20 impuesto a un cliente moroso de un crédito hipotecario y el abogado cobra por concepto de su servicio el 18% de la suma recuperada ¿Qué cantidad representa el pago del honorario del abogado?

g) Se ha vendido un artículo en $850.00 con una pérdida del 30% sobre el precio del costo ¿Cuánto costó el artículo?

h) Naomi entró al centro comercial de la plaza Cinépolis y se compró un par de zapatos de $890, una cartera de $567 y una chamarra en $983, si los zapatos tenían un descuento del 12%, la cartera un descuento del 2% y la chamarra un descuento de 6%.

   1.- ¿Cuánto es el total que pagó Naomi por los tres artículos adquiridos?

   2.- ¿Cuál es el porcentaje total aplicado en descuentos?

Manejo de operaciones matemáticas de forma manual o electrónica

La moneda de cambio desde su invento ha sido uno de los métodos más usados como forma de pago, por tanto, el hombre ha tratado de utilizarlo de la mejor manera; es decir, la moneda ha formado parte fundamental para las personas ya que con ello se puede realizar todo tipo de transacciones, dado que todo se mueve a través de este medio. Al estar todas las personas relacionadas con este tipo de moneda de cambio es importante saber aprovechar al máximo su utilidad teniendo en cuenta que el dinero puede ganar, perder o cambiar de valor con el paso del tiempo debido a la inflación; por ello, es importante el análisis y la comprensión de las Matemáticas Financieras 1, ya que en el desarrollo de los temas que aquí se desarrollan brindan los conocimientos necesarios para las tomas de decisiones a futuro del manejo del capital.

Sesión 2.1 Razones

Una razón es la comparación de dos cantidades expresadas en la misma unidad por medio de la resta o la división.

Se le llama razón aritmética al resultado de la comparación de cantidades representadas en la misma unidad, por medio de la sustracción.

Ejemplo 1:

Al comparar las cantidades **28** y **7** a través de la sustracción se obtiene **28 – 7 = 21** razón aritmética.

La razón geométrica es el resultado de comparar dos cantidades expresadas en la misma unidad por medio de la división.

Así, al comparar las cantidades **28 y 7** por medio de la división se obtiene $\frac{28}{7}=$ **4** razón geométrica.

Ejemplo 2:

La razón de **28** entre **2** es igual a **14**. Esto quiere decir que si dividimos **28/2=14** que sería la razón matemática, o dicho de otro modo (**2x14=28)**, podemos afirmar entonces que **28** tiene **2** veces al **14.**

Ejemplo 3:

En un bar, la razón de mujeres que toman una margarita o piñada es de $\frac{3}{4}$ si en el bar hay 35 mujeres ¿Cuántas de ellas toman margaritas? Si cada margarita cuesta $45.00 ¿Cuánto fueron los ingresos del día por la venta de margarita a los clientes?

Solución:

3:4 $\frac{a}{b} = 3/4$ a + b = 35

Si multiplicamos por x el antecedente y el consecuente:

$$\frac{a}{b} = \frac{3x}{4x}$$

3x + 4x = 35

7x = 35

X= 35/7 =5

(Margarita) $a = 3(5) = 15$ $(Piñada) b = 4(5) = 20$

La respuesta es que toman 15 margaritas y los ingresos por la venta de margaritas fueron $675.00

Cabe destacar que, en muchas oportunidades se distingue entre razón geométrica y razón aritmética. La razón geométrica supone el cociente de una progresión geométrica y consiste en comparar, como hicimos en el ejemplo anterior, dos cantidades a partir de su cociente (determinando qué número de veces está presente una en la otra).

La razón matemática, por lo tanto, es un vínculo entre dos magnitudes que son comparables entre sí, se trata de aquello que resulta cuando una de las magnitudes se divide o se resta por otra. Las razones por lo tanto se expresan como fracciones o como números decimales.

Sesión 2.2 Proporciones

Es aquella expresión matemática constituida por dos razones con el mismo resultado. Una razón es la igualdad de dos razones.

Si $\frac{a}{b} = q \ \ y \ \ \frac{c}{d} = q \ \ entonces \ \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

La lectura de los términos es así: a es a b como c es a d, puede escribirse también a ÷ b = c ÷ d

En una proporción se le llama extremos al antecedente de la primera razón y al consecuente de la segunda razón y medios al consecuente de la primera razón y al antecedente de la segunda razón. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $extremos: a\ y\ d \quad medios: c\ y\ b$

Una proporción se determina con la igualdad de dos razones. De la siguiente proporción $\frac{35}{5} = 7\ y\ \frac{56}{8} = 7$ el cociente obtenido de las razones que componen una proporción se conoce como factor de proporcionalidad (k). Cuando en una proporción se desconoce el valor de uno de los cuatro números que la conforman se puede utilizar el teorema para encontrar ese valor faltante. Teorema: En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo 1:

En la proporción $\frac{35}{5} = \frac{56}{8}$ 35 y 8 son los extremos y 5 y 56 son los medios; si la proporción es verdadera, se debe de cumplir que (35) (8) y (56) (5), lo cual es verdadera porque 280 = 280

Ejemplo 2:

Para comprar un billete de lotería, tres amigos cooperaron de la manera siguiente: Luis, aportó $10.00, Pedro $8.00 y Juan $22.00. Una vez realizado el sorteo los tres amigos ganaron un premio equivalente a $163,000.00. Con base en la cooperación que cada quien aportó para comprar el billete ¿cómo deben repartir el premio?

Luis aportó

$\frac{10}{40}$ x $\frac{x}{163,000.00}$= 40,750.00

x= $40,750.00

Pedro aportó

$\frac{8}{40}$ x $\frac{x}{163,000.00}$ = 32,600.00

X=$ 32,600.00

Juan aportó

$\frac{22}{40}$ x $\frac{x}{163,000.00}$ = 89,000.00

X= $ 89,000.00

Actividad de reforzamiento

1.- Ángel contestó correctamente 120 de 150 preguntas de un examen. ¿Cuál es la razón de respuesta correcta al número total de preguntas?

2.- En relación a la pregunta anterior ¿cuál es la razón del número de respuestas incorrectas al número de correctas?

3.- En un día de pesca se capturaron 34 carpas y 47 robalos ¿cuál es la razón de robalos a carpas pescadas?

4.- En una escuela, la cantidad de alumnos de primer año con respecto a los de segundo año es de 4:3. Si en total hay 2300 alumnos ¿cuántos alumnos hay en segundo año?

5.- Un estudiante contestó correctamente 17 de 20 preguntas de un examen y 13 de 18 en otro. ¿En qué examen obtuvo mejor calificación?

6.- La razón de dos enteros es de 3:8 y el número más grande es de 87. ¿Cuál es el número más pequeño?

Sesión 2.3 Proporcional (directo, inverso)

Este consiste en la distribución de una cantidad en partes proporcionales. Se puede decir que el reparto proporcional implica repartir una magnitud (km, tiempo, moneda) total de manera proporcional entre diversas magnitudes de una misma clase. Es importante conocer que existen dos tipos fundamentales de repartos proporcionales, como queda claro en el ámbito de las matemáticas se tiene el reparto proporcional directo, mismo que se basa en el hecho de que a mayor cantidad corresponde, por tanto, mayor proporción. Se puede realizar también el reparto proporcional inverso que parte de la máxima que a más cantidad menor proporción. También está lo que se conoce como reparto proporcional compuesto que es aquel que tiene lugar cuando las partes que se van a repartir son proporcionales al producto de varios números. A su vez, ese puede ser directo, inverso o mixto.

Proporcionalidad directa

El reparto es directo cuando mayor sea el número proporcional, más le corresponde al beneficiario o viceversa. Iniciamos al repartir el número “N” entre las partes proporcionales “a”, “b” y “c” Donde “a”, “b” y “c” se le conoce como números proporcionales. Sea “x”, “y” “z”, la cantidad buscada que le corresponde a cada número proporcional. Existen dos métodos de cálculo que son los siguientes: método de proporciones y el método de reducción de la unidad. (Solo abordaremos el método de proporciones). El método de proporciones consiste en formular proporciones de acuerdo con el siguiente procedimiento, para obtener la fórmula para dividir un número en partes proporcionales a otros varios. Sea el número N que queremos dividir en partes proporcionales a “a”, “b” y “c”. Llamamos x a la parte de N que le corresponde a “a”, y a la que le corresponde a “b” y z a la que le corresponde a “c”. Como la suma de estas partes es igual al número dado, tendremos que N = x + y + z. Es evidente que si a > b > c y x > y > z. Luego podemos formar con estas cantidades una serie de razones iguales. Y como hay un teorema que dice que una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente, tendremos:

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}$ o sea $\frac{N}{a+b+c}=\frac{x}{a}$ ∴ x= $\frac{Na}{a+b+c}$

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{y}{b}$ o sea $\frac{N}{a+b+c}=\frac{y}{b}$ ∴ y= $\frac{Nb}{a+b+c}$

$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{z}{c}$ o sea $\frac{N}{a+b+c}=\frac{z}{c}$ ∴ z= $\frac{Nc}{a+b+c}$

De lo anterior se deduce la siguiente regla. Para repartir un número en partes proporcionales a otros varios se multiplica el número que se quiere repartir por cada uno de los otros números y se divide por la suma de éstos.

Ejemplo 1:

Repartir 1,200 en partes proporcionales a 12, 8 y 6

$$a = 12 \quad b = 8 \quad c = 6 \qquad N = 1{,}200$$
$$a + b + c = 26$$

$x = \frac{Na}{a+b+c}= \frac{1{,}200\ (12)}{26}= \frac{14{,}400}{26}=$ 553.85

$y = \frac{Nb}{a+b+c} = \frac{1{,}200\ (8)}{26} = 369.23$

$z = \frac{Nc}{a+b+c} = \frac{1{,}200\ (6)}{26} = 276.92$

Para la comprobación tenemos la sumatoria de todas las partidas y obtendremos como resultado el valor de N (553.85+369.23+276.92) = 1,200.

Ejemplo 2:
Tres hermanos adquieren una propiedad en $250,000.00 y algún tiempo después la venden por $290,000.00 Si las partes que impusieron son proporcionales a los números 2,5 y 3 ¿cuánto ganó cada uno?

$$a = 2 \quad b = 5 \quad c = 3 \qquad N = 40{,}000$$
$$a + b + c = 10$$
$$N = 290{,}000.00 - 250{,}000.00 = 40{,}000.00$$

$x = \frac{Na}{a+b+c} = \frac{40{,}000.00\ (2)}{10} = \frac{80{,}000.00}{10} = 8{,}000.00$

$y = \frac{Na}{a+b+c} = \frac{40{,}000.00\ (5)}{10} = \frac{200{,}000.00}{10} = 20{,}000.00$

$z = \frac{Na}{a+b+c} = \frac{40{,}000.00\ (3)}{10} = \frac{120{,}000.00}{10} = 12{,}000.00$

Cada uno ganó = $8,000.00+20,000.00+12,000.00

Par repartir un número en partes directamente proporcionales a varios quebrados. La regla nos dice que se reducen los quebrados a un común denominador. Se prescinde del denominador y se divide el número dado en partes proporcionales a los numeradores.

Ejemplo 3:

Resolver las siguientes proporciones:

a) $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$

Solución

$$4x = 40; donde\colon \frac{4x}{4} = \frac{40}{4}\ ;\ \ o\ sea\colon$$

$$x = \frac{40}{4} = 10$$

Resuelve los siguientes problemas:

1.- Un automóvil recorre 180 km con 17 litros de gasolina. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25 litros?

2.- Un motor gira 46 revoluciones en 4 segundos. ¿Cuántas revoluciones girará en un minuto?

3.- Un padre dispone al morir que su fortuna que está constituida por una casa valuada en $278,000.00 y dos automóviles valuados en $180,000.00 cada uno se reparta entre sus tres hijos de modo que el mayor tenga 8 partes de la herencia, el mediano 6 y el menor 3. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

4.- Si un reloj se atrasa 4 minutos cada 12 horas ¿cuántos segundos se atrasará en 48 horas?

5.-Cinco hermanos adquieren una propiedad en $285,000.00 y algún tiempo después la venden por $323,000.00. Si las partes que impusieron son proporcionales a los números 9,2 y 7 ¿cuánto ganó cada uno?

Proporcionalidad inversa

El reparto proporcional es inverso cuando a medida que es mayor el número proporcional menor le corresponda en el reparto, y viceversa.

Iniciamos al repartir el número “N” entre las partes proporcionales “a”, “b” y “c” Donde “a”, “b” y “c” se les conoce como números proporcionales.

Sea “x”, “y” “z” la cantidad buscada que le corresponde a cada número proporcional. Se inicia al convertir el reparto proporcional simple inverso en reparto proporcional simple directo, de la siguiente manera:

- Se invierte cada uno de los números proporcionales. Esta operación se consigue dividiendo uno entre el número proporcional.
- Al tener invertidos todos los números proporcionales; el siguiente paso es obtener un común denominador a los inversos de los números proporcionales.
- Se le da solución de igual manera que a un reparto proporcional simple directo.

Como regla general Se invierten los números dados y se reparte el número que se quiere dividir en parte directamente proporcional.

Ejemplo1:

Durante la lectura de un testamento, el abogado del señor Rodríguez leyó el siguiente párrafo sobre la herencia que quería dejarle a sus hijas: *A mis hijas: María, Ángela y Naomi les quiero repartir la cantidad de 560,000.00. El reparto deberá hacerse de forma que reciban una cantidad inversamente proporcional a la edad que tengan al momento de mi fallecimiento…"* Si las edades de María, Ángela y Naomi son 20, 24 y 32 *años, respectivamente. ¿Cuánto deberá recibir cada una?*

Debido a que el reparto se realizará de manera inversamente proporcional, a la hija menor le tocará una cantidad mayor de la herencia, mientras que a la hija mayor le tocará una cantidad menor. Esto se puede resolver obteniendo los inversos de las edades y realizando un reparto directamente proporcional con ellos y la cantidad total.

Obtenemos los inversos de las edades.

$\frac{1}{20} \quad \frac{1}{24} \quad \frac{1}{32}$

Convertimos las fracciones a denominador común (recuerda que puedes emplear el mcm).

$\frac{24}{480} \quad \frac{20}{480} \quad \frac{15}{480}$

Realizamos un reparto directamente proporcional a los numeradores: 24, 20 y 15.

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{20} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{24+20+15} = \frac{560{,}000.00}{59}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{560{,}000.00}{59} = \frac{(560{,}000.00)(24)}{59} = \frac{13{,}440{,}000.00}{59} = 227{,}796.61$$

$$\frac{y}{20} = \frac{560{,}000.00}{59} = \frac{(560{,}000.00)(20)}{59} = \frac{11{,}200{,}000.00}{59} = 189{,}830.51$$

$$\frac{y}{15} = \frac{560{,}000.00}{59} = \frac{(560{,}000.00)(15)}{59} = \frac{8{,}400{,}000.00}{59} = 142{,}372.88$$

De esta manera queda repartida la herencia.

Nombres de las hijas	edades	cantidad por recibir
María	20	$ 227,796.61
Ángela	*24*	*$ 189,830.51*
Naomi	*32*	*$ 142,372.88*

Actividad de aprendizaje

1.- Repartir 260 en partes inversamente proporcional 7, 21, 84, 10 y 30

2.- En un concurso de matemáticas se entregaron 40 problemas y se premiaron los tres primeros lugares en partes inversamente proporcionales al número de problemas no resueltos. Respectivamente no resolvieron 1, 2 y 3 problemas ¿cuánto le corresponde a cada uno si el premio es de $ 850?

Bloque II – Sucesiones y Series

Introducción

Las sucesiones y series representan un tema vital en el estudio de las matemáticas financieras debido a que su aplicación reside en el cálculo de los montos de pago de créditos personales donde suelen desglosarse el monto que va a capital y el monto para el pago de intereses, en el cual también se incluyen los impuestos por la adquisición del crédito cuyo interés podría ser compuesto o simple (este último se describe en el Bloque III de la presente guía).

El presente capítulo se compone de 15 sesiones, cada una diseñada para poder facilitar a los alumnos un módulo de 50 minutos cada una.

Objetivo específico

Que el alumno aprenda la aplicación de las sucesiones y series en ámbitos de las matemáticas financieras mediante la solución de ejercicios de interés compuesto.

Competencias

Identifica y utiliza las series y sucesiones aritméticas y geométricas para la solución de problemas de interés compuesto.

Analiza el resultado obtenido de los ejercicios de sucesiones y series aplicando modelos matemáticos, así como uso de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

Interpreta los resultados obtenidos de los ejercicios de sucesiones y series mediante procedimientos matemáticos de saldos insolutos en situaciones reales.

Resuelve problemas prácticos en situaciones reales de empresas financieras y mercantiles mediante procedimientos matemáticos.

Emplea las sucesiones en casos prácticos reflexionando sobre los procedimientos e identificando sus pasos.

Interdisciplinariedad:

El presente bloque cuenta con interdisciplinariedad con la materia de Informática ya que las Tecnológicas de Información y Comunicación (TIC) son una de las principales herramientas para asistir al cálculo de las series y sucesiones, así como la aplicación de las mismas en el cálculo de interés compuesto.

Conceptos Clave: Matemáticas Financieras, sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas, interés compuesto.

Actividades de Aprendizaje

Sesión 2.1. La sucesión infinita

Comparta a sus alumnos la siguiente información:

Antes de pasar a la aplicación de las sucesiones y series en las finanzas se analizarán algunas de sus principales propiedades.

Es una serie de elementos numéricos o literales que ordenados mantienen cierto vínculo entre sí. Por otra parte, al hablar de algo infinito se trata de uno o varios elementos numéricos o literales que carecen de fin. Por lo tanto, una sucesión infinita es una serie de elementos o literales ordenadas que se caracterizan por mantener una relación y no tener un fin (Colegio Nacional de Matemáticas, 2009).

La sucesión infinita es dada por:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

Donde a_n es el término general y se expresa como:

$$a_n = f(n) \; o \; \{a_n\}$$

Donde n es un número natural, por lo tanto, a_1 representa el primer término, a_2 el segundo término, a_3 el tercer término; y por ejemplo, si definimos a_{15} se trataría del décimo quinto término a_n es el n-ésimo término de la sucesión.

Comparta con sus alumnos lo siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Escribe la sucesión con n-ésimo término $\{4^n\}$ siendo n un número natural.

Ya que n es natural entonces se debe tomar los valores 1, 2, 3, 4 …,

$$a_1 = 4^1, \quad a_2 = 4^2, \quad a_3 = 4^3, \quad a_4 = 4^4, \quad \dots, \quad a_n = 4^n$$

Luego se calcula el resultado de cada término.

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 16, \quad a_3 = 64, \quad a_4 = 256, \quad \dots, \quad a_n = 4^n$$

Por lo tanto, la sucesión final es:

$$4, 16, 64, 256, \dots, 4^n$$

Ejemplo 2.

Determine la sucesión con n-ésimo término $\{(-2)^{n+1}-3n\}$ siendo n un número natural.

Se comienza sustituyendo n por los valores de 1, 2, 3 y 4.

Si $n=1, a_1=(-2)^{1+1}-3(1)=(-2)^2-3=4-3=1$

Si $n=2, a_2=(-2)^{2+1}-3(2)=(-2)^3-6=-8-6=-14$

Si $n=3, a_3=(-2)^{3+1}-3(3)=(-2)^4-9=16-9=7$

Si $n=4, a_4=(-2)^{4+1}-3(4)=(-2)^5-12=-32-12=-44$

Por lo tanto, la sucesión se conforma de los siguientes términos:

$$1,-14,7,-44,\dots,(-2)^{n+1}-3n$$

Tal y como es posible emplear números naturales, en las sucesiones también es posible obtener sucesiones fraccionales. Analice el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.

Encuentre los términos que conforman la sucesión de $a_n=\frac{2n}{n+1}$

Se comienza sustituyendo n por los valores de 1, 2, 3 y 4.

Si $n=1, a_1=\frac{2(1)}{(1)+1}=\frac{2}{2}=1$

Si $n=2, a_2=\frac{2(2)}{(2)+1}=\frac{4}{3}$

Si $n=3, a_3=\frac{2(3)}{(3)+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Si $n=4, a_4=\frac{2(4)}{(3)+1}=\frac{8}{4}=2$

Por lo tanto, la sucesión se conforma de los siguientes términos:

$$1,\frac{3}{4},\frac{3}{2},2,\dots,\frac{2n}{n+1}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios.

Serie de ejercicios

Obtenga las sucesiones de las siguientes funciones:

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

$$a_n = \frac{2}{n+3}$$

$$a_n = n^3$$

$$a_n = \frac{2}{3}n + 1$$

$$a_n = 3^{2n+1} - 1$$

Sesión 2.2. Suma de una sucesión infinita

La suma de los términos que componen una sucesión infinita requiere del uso de la sumatoria que se expresa mediante Sigma (∑) de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Esta expresión se lee: "sumatoria de X_i", donde i toma los valores de 1 a n.

Donde i es el valor inicial denominado también límite inferior; n es el valor final llamado límite superior.

Una vez comprendida esta breve introducción al uso de la sumatoria se procede a analizar la suma de sucesiones infinitas. Dada una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, la suma de los primeros m términos se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$

Donde uno es el valor mínimo y m es el valor máximo de la variable de la suma j.

Comparta con sus alumnos lo siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.

Determine la suma:

$$\sum_{j=2}^{9} (j+3).$$

Primero se analiza la configuración de la sumatoria $j = 2$ quiere decir que el número mínimo con el que se sustituirá j es 2. Por lo tanto, se realizará la suma con los valores de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

$$\sum_{j=2}^{9} (j+3) = (2+3)+(3+3)+(4+3)+(5+3)+(6+3)+(7+3)+\cdots$$

$$\dots (8+3)+(9+3) = 5+6+7+8+9+10+11+12 = 68$$

El resultado final es 68.

Ejemplo 2.

Determine la suma:

$$\sum_{j=1}^{4} j^3.$$

Primero, se analiza la configuración de la sumatoria $j = 1$ quiere decir que el número mínimo con el que se sustituirá j es 1. Y el valor máximo es 4. Por lo tanto, se realizará la suma con los valores de 1, 2, 3 y 4.

$$\sum_{j=1}^{4} j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

El resultado de la suma es 100.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Determine las sumas de las siguientes sucesiones:

$$\sum_{j=1}^{8} (3j-2)$$

$$\sum_{j=3}^{7} 4^j$$

$$\sum_{j=1}^{5} (-2)^{j+1}$$

$$\sum_{j=3}^{6} \frac{j+3}{j-1}$$

$$\sum_{j=1}^{8} (j^2 - 5j)$$

Sesión 2.3. Sucesión aritmética

Comparta a sus alumnos la siguiente información:

La sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$, es una progresión aritmética si existe un número real r, de modo que para todo número natural la sucesión aritmética se expresa como:

$$a_m = a_{m-1} + r$$

Para conocer la diferencia común entre los números de la sucesión basta con despejar r de modo que la ecuación queda configurada como:

$$r = a_m - a_{m-1}$$

Entonces, una sucesión aritmética es cuando una sucesión de números cuenta con el mismo valor de diferencia de separación entre sus valores.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Calcule la siguiente sucesión aritmética de los números de 1, 2, 3, 4, y 5, si $a_1 = 3$ y $r = 5$:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + r = 3 + 5 = 8$$

$$a_3 = a_2 + r = 8 + 5 = 13$$

$$a_4 = a_3 + r = 13 + 5 = 18$$

$$a_5 = a_4 + r = 18 + 5 = 23$$

Ejemplo 2:

Calcule la siguiente sucesión aritmética de los números de 1, 2, 3 y 4, si $a_1 = 2$ y $r = 3$:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 + r = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + r = 5 + 3 = 8$$

$$a_4 = a_3 + r = 8 + 3 = 11$$

En caso de que se solicite determinar la diferencia común de una sucesión se debe realizar los procedimientos que se describen en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3:

De la sucesión: 2, 7, 12, 17,…, $5n - 2$ obtenga la diferencia común.

Para este tipo de ejercicios usamos la siguiente fórmula:

$$r = a_m - a_{m-1}$$

Se sustituye los valores en la fórmula, sustituyendo n

$$r = a_m - a_{m-1} = [5(m) - 2] - [5(m-1) - 2] = [5m - 2] - [5m - 5 - 2]$$
$$= 5m - 2 - 5m + 5 + 2$$

Se realiza la operación de términos semejantes, de este modo solo queda el valor que representa la diferencia común de la sucesión:

$$r = 5$$

Ejemplo 4:

De la sucesión: 16, 6, 13, 3, calcule su diferencia común y mencione si se trata de una sucesión aritmética o no.

Para este tipo de ejercicios usamos la fórmula de r.

$$r = 16 - 6 = 10r = 6 - 13 = -10r = 13 - 3 = 10$$

Esta no es una sucesión aritmética ya que entre los valores de 6 y 13 la diferencia es -10. En una sucesión aritmética todos los valores de una sucesión tienen la misma diferencia.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule la siguiente sucesión aritmética de los números de 1, 2, 3, 4, y 5, si $a_1 = 1$ y $r = 2$.

Calcule la siguiente sucesión aritmética de los números de 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7, si $a_1 = 4$ y $r = 6$.

Calcule la siguiente sucesión aritmética de los números de 1, 2, 3, 4, y 5, 6, 7, 8, 9, y 10 si $a_1 = 5$ y $r = 3$.

De la sucesión: 2, 5, 8, 11,…, $3n - 1$ obtenga la diferencia común y mencione si es o no una sucesión aritmética.

De la sucesión: 2, 5, 8, 11,…, $3n - 1$ obtenga la diferencia común y mencione si es o no una sucesión aritmética.

De la sucesión: 3, 9, 16, 21,… obtenga la diferencia común y mencione si es o no una sucesión aritmética.

Sesión 2.4. Cálculo del n-ésimo término de una progresión aritmética

Comparta a sus alumnos la siguiente información:

Cuando una sucesión es aritmética es posible obtener el n-ésimo término de este mediante la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Donde a_n es el n-ésimo término de la progresión; a_1 es el primer término de la progresión; n es el número del término que se desea conocer; y r es la diferencia común.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determina el 7° término de la progresión 0.25, 0.35, 0.45, 0.55,….

Se comienza identificando las variables de la fórmula de a_n.

$$a_1 = 0.25, \qquad n = 7, \qquad r = 0.10$$

Cómo se desea conocer el 7° término, $n = 7$.

Ahora se realiza la sustitución en la fórmula:

$$a_n = 0.25 + (7-1)(0.10) = 0.25 + (6)(0.10) = 0.25 + 0.60 = 0.85$$

De modo que el 7° término de la progresión es 0.85.

Ejemplo 2:

Encuentre el 12° término de la sucesión aritmética 1, 7, 13,….

Se comienza identificando las variables de la fórmula de a_n.

$$a_1 = 1, \qquad n = 12, \qquad r = 6$$

Ahora se realiza la sustitución en la fórmula:

$$a_n = 1 + (12 - 1)(6) = 1 + (11)(6) = 1 + 66 = 67$$

De modo que, el 12º término de la progresión es 67.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Obtenga el 15º. Término de la sucesión: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots.$

Obtenga el 9º. Término de la sucesión 4, 9, 14,….

Obtenga el 7º. Término de la sucesión 1, 7, 13,….

Obtenga el 16º. Término de la sucesión 3, 3.25, 3.5,….

Obtenga el 15º. Término de la sucesión -5, 22, 49,….

Obtenga el 10º. Término de la sucesión 1.75, 2, 2.25, 2.5,….

Sesión 2.5. Suma de los primeros n términos de una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

Entonces, la suma de los primeros n términos es dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

De modo que, la fórmula para hallar los primeros n se expresa como:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determine la suma de los primeros 10 términos de la progresión aritmética:

$$7, 13, 19, \ldots$$

Primeramente, se debe conocer cuál es el décimo término que se solicita, para ello es necesario emplear el proceso visto en la sesión 2.4 para obtener el valor de a_n.

$$a_1 = 7, \qquad n = 10, \qquad r = 6$$

Ahora se realiza la sustitución en la fórmula:

$$a_n = 7 + (10 - 1)(6) = 7 + (9)(6) = 7 + 54 = 61$$

El décimo término es 61. Ahora que se tiene el término correspondiente a a_n se procede a emplear la fórmula:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Se sustituyen los valores de la siguiente forma:

$$S = \frac{10(7 + 61)}{2} = \frac{10(68)}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

De modo que, la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética es 340.

Ejemplo 2:

Obtenga la suma de los primeros 19 términos de la siguiente sucesión aritmética:

$$\frac{3}{4}, \frac{15}{4}, \frac{27}{4}, \ldots$$

Se comienza calculando el valor de a_n, como en el ejemplo anterior.

$$a_1 = \frac{3}{4}, \qquad n = 19, \qquad r = 3$$

Ahora se realiza la sustitución en la fórmula:

$$a_n = \frac{3}{4} + (19 - 1)(3) = \frac{3}{4} + (18)(3) = \frac{3}{4} + 54 = \frac{3}{4} + \frac{54}{1} = \frac{3 + 216}{4} = \frac{219}{4}$$

Una vez obtenido a_n se procede a calcular la suma de los primeros 19 términos de la sucesión aritmética.

$$S = \frac{19\left(\frac{3}{4} + \frac{219}{4}\right)}{2} = \frac{19\left(\frac{111}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{2109}{2}}{2} = \frac{2109}{4}$$

La suma de los primeros 19 términos es igual a $\frac{2109}{4}$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

¿Cuál es la suma de los primeros 12 términos de 2, 9, 16,…?

Obtenga la suma de los primeros 20 términos de 120, 131, 142,…

Calcule la suma de los primeros 15 términos de 15, 17.5, 20,…

¿Cuál es la suma de los primeros 22 términos de 9, 12, 15,…?

¿Cuál es la suma de los primeros 11 términos de 3, $\frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \ldots$?

Obtenga la suma de los primeros 8 términos de 988, 1000, 1012,…

Obtenga la suma de los primeros 14 términos de $\frac{5}{7}, \frac{17}{14}, \frac{12}{7}, \ldots$

Sesión 2.6. Interpolación de medios aritméticos

Los medios aritméticos son los términos que se encuentran entre el primer y el último término y dependen directamente del valor de la razón.

La interpolación de medios aritméticos consiste en encontrar los términos de toda la progresión a partir de conocer el primer y último término.

Para calcular los medios aritméticos se emplea:

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

Comparta con sus alumnos lo siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Interpola 5 medios aritméticos entre 3 y 27.5.

Primeramente se definen las variables n, a_n y a_1.

$$a_1 = 3, \qquad a_n = 27.5, \qquad n = 7$$

$n = 7$ debido a que el ejercicio requiere que busquemos 5 medios aritméticos de la sucesión entre 3 y 27.5, a lo cual se le suma otros 2 por los valores de a_1 y a_n. Ahora se sustituyen los valores en la fórmula:

$$r = \frac{27.5 - 3}{7 - 1} = \frac{24.5}{6} = 4.08$$

La diferencia común es de 4.08, entonces, se realiza el siguiente proceso:

$$3, (3 + 4.08), (7.08 + 4.08), (11.16 + 4.08), (15.24 + 4.08), (19.32 + 4.08), 27.5$$

$$3, 7.08, 11.16, 15.24, 19.32, 23.4, 27.5$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Interpola 7 medios aritméticos en una sucesión cuyo primer y último término son: 4 y 49, respectivamente.

Interpola 4 medios aritméticos entre 12 y 125.

Interpola 9 medios aritméticos entre 9.4 y 90.5.

Interpola 6 medios aritméticos cuyo primer y último término son: $\frac{2}{5}$ y $\frac{93}{10}$, respectivamente.

Interpola 10 medios aritméticos entre 13 y 226.

Interpola 5 medios aritméticos entre -3 y 1.5.

Sesión 2.7. Progresión geométrica

Una progresión geométrica es una progresión en la cual cada término después del primero es obtenido mediante la multiplicación del término anterior una cantidad constante llamada razón común (Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California Sur, 2008). Cuando se suma los términos de una progresión geométrica se le conoce como serie geométrica, la cual se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$a_{m+1} = a_m\, r \qquad\qquad r \neq 0$$

Donde la diferencia común o razón r se obtiene mediante:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determine si la siguiente sucesión: $3, 9, 27, \ldots$ es geométrica.

Se emplea la fórmula para obtener la razón r:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{9}{3} = 3$$

Se puede observar que el siguiente término de la sucesión se obtendría al multiplicar el término 27 por 3, lo cual daría 81, y éste también al multiplicar por 3 daría el siguiente término, el cual es igual a 243. De este modo, queda comprobado que la sucesión si es geométrica.

Ejemplo 2:

Determine si la siguiente sucesión: $5, 10, 20, \ldots$ es geométrica.

Se emplea la fórmula para obtener la razón r:

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{10}{5} = 2$$

Se puede observar que el siguiente término de la sucesión se obtendría al multiplicar el término 20 por el valor de la razón (2), daría 40, y este también al multiplicar por 2 daría el siguiente término, el cual es igual a 80. De este modo, queda comprobado que la sucesión si es geométrica.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Determine la razón de las siguientes sucesiones geométricas:

$$2, 10, 50, 250, \ldots.$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots.$$

$$4, 24, 144, \ldots$$

$$12, 24, 72, \ldots$$

$$-9, -3, -1, \ldots.$$

Para obtener el n-ésimo término de una progresión geométrica se emplea la siguiente expresión:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determine el 12°. término de la progresión 26, 52, 104,….

Primeramente, se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r = \frac{52}{26} = 2$$

Una vez que se conoce la razón o diferencia común r se identifican las variables de más variables del ejercicio:

$$a_1 = 26, \qquad r = 2, \qquad n = 12$$

Se sustituyen los valores en la fórmula:

$$a_n = a_1\, r^{n-1} = (26)(2)^{12-1} = (26)(2{,}048) = 4{,}096$$

Lo anterior significa que el 12º término de la sucesión geométrica es 4,096.

Ejemplo 2:

Determine el 6º término de la progresión 6, 36, 216,….

Primeramente, se obtiene la razón al dividir uno de los elementos entre su antecesor:

$$r = \frac{36}{6} = 6$$

Una vez que se conoce la razón o diferencia común r se identifican las variables demás variables del ejercicio:

$$a_1 = 6, \qquad r = 6, \qquad n = 15$$

Se sustituyen los valores en la fórmula:

$$a_n = a_1\, r^{n-1} = (6)(6)^{6-1} = (6)(7{,}776) = 46{,}656$$

Lo anterior significa que el 12º término de la sucesión geométrica es 46,656.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Determine el término que se solicita en las siguientes sucesiones:

Obtenga el 9° término de $\frac{1}{2}, 2, 8, ...$

Obtenga el 10° término de 6, 30, 150,…

Calcule el 7° término de $\frac{1}{2}, 1, 4, 16, ...$

Obtenga el 15° término de $-5, -15, -45, ...$

Determine el 8° término de $8, 16, 32, ...$

Sesión 2.8. Suma de los primeros n términos de una progresión geométrica

Cuando se desea conocer la suma de una cierta cantidad de términos de una progresión geométrica se debe emplear la siguiente expresión:

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determine la suma de los primeros 6 términos de la progresión geométrica:

$$5,15,45, ...$$

Primeramente, se calcula la razón r.

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{15}{5} = 3$$

Luego, se identifican las variables de la fórmula:

$$a_1 = 3, \qquad r = 3, \qquad n = 12$$

Ahora se realizan las sustituciones en la fórmula:

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{5(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(729 - 1)}{2} = \frac{5(728)}{2} = \frac{3{,}640}{2} = 1{,}820$$

De modo que, la suma de los primeros 6 términos de la sucesión geométrica es 1,820.

Ejemplo 2:

Determine la suma de los primeros 8 términos de la progresión geométrica:

$$2{,}6{,}18, \ldots$$

Primeramente, se calcula la razón r.

$$r = \frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego, se identifican las variables de la fórmula:

$$a_1 = 2, \qquad r = 3, \qquad n = 8$$

Ahora se realizan las sustituciones en la fórmula:

$$S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6{,}561 - 1)}{2} = \frac{2(6{,}560)}{2} = \frac{13120}{2} = 6{,}560$$

De modo que, la suma de los primeros 6 términos de la sucesión geométrica es 6,560.

Ejemplo 3:

Determina el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es 2,184, si su primer término es 6 y su razón es 3.

Primeramente, se identifican las variables de la fórmula:

$$a_1 = 6, \qquad r = 3, \qquad S = 2{,}184$$

Ahora se realizan las sustituciones en la fórmula:

$$2{,}184 = \frac{6(3^n - 1)}{3 - 1}$$

Se comienza despejando 6, el cual multiplicando pasaría dividiendo como denominador.

$$\frac{2{,}184}{6} = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

$$364 = \frac{(3^n - 1)}{2}$$

Luego se despeja 2, que al estar dividiendo pasa del otro lado del signo igual multiplicando

$$364(2) = 3^n - 1$$

$$728 = 3^n - 1$$

Se despeja -1.

$$728 + 1 = 3^n$$

$$729 = 3^n$$

Finalmente, se simplifica 729.

729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

De este modo se sabe que la sucesión geométrica cuenta con 6 términos.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Determine la suma de:

Los primero 9 términos de: $0.5, 0.25, 0.125, \ldots$

Los primeros 7 términos de: $3, 15, 75, 375, \ldots.$

Los primeros 11 términos de: $8, 24, 72, \ldots.$

Los primero 10 términos de: $7, 14, 28, \ldots.$

Los primeros 14 términos de: $\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{18}{5}, \ldots.$

Determina el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es 118,096, si su primer término es 4 y su razón es 3.

Determina el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es 52,509, si su primer término es 12 y su razón es 3.

Determina el número de elementos de una progresión geométrica cuya suma es 15,345, si su primero término es 15 y su razón es 2.

Sesión 2.9. Sucesión geométrica infinita

El comportamiento de una progresión geométrica infinita es dado por:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Determine la suma de la sucesión geométrica infinita: 2, 0.5, 0.125,….

Se comienza calculando el valor de r.

$$r = \frac{0.5}{2} = 0.25$$

Se identifican las variables del ejercicio:

$$a_1 = 2, \qquad r = 0.25$$

Luego, se realizan las sustituciones en la fórmula:

$$S_n = \frac{2}{1-0.25} = \frac{2}{0.75} = \frac{8}{3} = 2.666$$

Por lo tanto, la suma de los términos de la progresión es 2.6666.

Ejemplo 2:

Determine la suma de la sucesión geométrica infinita: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \ldots.$

Se comienza calculando el valor de r.

$$r = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se identifican las variables del ejercicio:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad r = \frac{1}{3}$$

Luego, se realizan las sustituciones en la fórmula:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Por lo tanto, la suma de los términos de la progresión es $\frac{3}{4}$.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Encuentre la suma infinita de las siguientes progresiones:

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$$

$$6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$$

$$34, 21, 13, \ldots.$$

80, 40, 20,…

Sesión 2.10. Interés compuesto

Posterior a todo este conocimiento sobre sucesiones aritméticas y geométricas se procede a conocer una de las aplicaciones más importantes de las sucesiones o progresiones geométricas: el interés compuesto, el cual es uno de los elementos de uso frecuente en las finanzas.

El interés compuesto es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses (Ramírez Molinares, García Barroza, Pantoja Algarín, & Zambrano Meza, 2009).

El interés compuesto se conforma de los siguientes elementos:

Tasa de interés: es el valor de interés el cual se expresa de forma porcentual.

Periodo de aplicación: es la forma en la que se aplicará el interés, podría ser por ejemplo el 2% mensual, el 25% anual compuesto trimestralmente, el 15% anual compuesto continuamente.

Base de aplicación: es la cantidad de dinero sobre la cual se aplicará el interés de cada periodo. Puede ser, por ejemplo: 25% anual compuesto trimestralmente

Forma de aplicación: es el momento en el cual se causa el interés. Por ejemplo, el 2.5% mensual por adelantado.

El interés compuesto para obtener un valor futuro es obtenido mediante la siguiente expresión:

$$F = P(1 + i)^n$$

Donde F es el monto futuro o generado; P el capital o valor presente; i la tasa de interés porcentual anual; y n el número de capitalizaciones al año.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

¿Cuánto dinero se tiene dentro de 6 meses en una cuenta de ahorros con una tasa de 1.8% mensual si hoy se invierten $350,000?

Primeramente, se identifican las variables del problema:

$$P = \$3{,}000, \qquad i = 1.8\% = 0.018, \qquad n = 6$$

Ahora se procede a sustituir todos los datos en la fórmula:

$$P = (350{,}000)(1 + 0.018)^{(6)} = 350{,}000(1.018)^6 = 350{,}000(1.1129)\ldots$$

$$P = 389{,}515$$

Después de 6 meses de la inversión se recibirían $389,515.

Ejemplo 2:

Se ingresan $165,000 en una cuenta de inversión, ¿cuánto se obtendrá a final de año si se cuenta con una tasa de interés mensual del 3%?

se identifican las variables del problema:

$$P = \$165{,}000, \qquad i = 3\% = 0.03, \qquad n = 12$$

Ahora se procede a sustituir todos los datos en la fórmula:

$$P = (165{,}000)(1 + 0.03)^{(12)} = 165{,}000(1.03)^{12} = 165{,}000(1.426)\ldots$$

$$P = 235{,}250.54$$

Después de un año de la inversión se recibirían $235,250.54.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule el valor futuro de un capital de $20,000 a interés compuesto durante 15 meses a una tasa de 24% capitalizable mensual.

¿Cuánto dinero se obtiene dentro de 6 meses en una cuenta de ahorro que reconoce 2.3% mensual si hoy se invierte $450,000?

Se ingresa a una cuenta de inversión $155,000 ¿cuánto se podrá retirar al final del año si se presenta una tasa de interés mensual del 3%?

¿Cuál es el capital final de una inversión inicial de $58,000 a un interés mensual de 6.5% al cabo de 2 años?

Se invierten $10,000 a una tasa de interés de 10% compuesto anual durante 10 años ¿cuál es el valor futuro de dicha inversión?

Sesión 2.11. Cálculo del número de periodos

El número de periodos se puede calcular haciendo un despeje de la fórmula descrita en la sesión anterior de modo que esta queda como:

$$n = \frac{ln\, ln\left(\frac{F}{P}\right)}{ln\, ln\,(1+i)}$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

¿En cuánto tiempo $900,000 equivalen a $500,000 hoy, sabiendo que el interés que gana el dinero es de 2.3% mensual?

Se identifican las variables del problema:

$$P = \$500{,}000, \qquad F = \$900{,}000, \qquad i = 2.3\% = 0.023$$

Ahora se procede a sustituir todos los datos en la fórmula:

$$n = \frac{ln\, ln\left(\frac{F}{P}\right)}{ln\, ln\,(1+i)} = \frac{ln\, ln\left(\frac{900{,}000}{500{,}000}\right)}{ln\, ln\,(1+0.023)} = \frac{ln\, ln\,(1.8)}{ln\, ln\,(1.023)} = \frac{0.587}{0.022} = 26.68$$

Lo anterior significa que se requieren 26.68 meses para que los $900,000 obtengan valor de $500,000.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Una empresa adquiere un préstamo de $75,000 al 2.5 mensual para lo cual firmaron un pagaré por $142,000 ¿qué plazo le dieron para cubrir la deuda?

Se obtiene un préstamo de $3, 450,000 con un interés de 4.5% mensual si al final se paga en total $5, 900,000 ¿qué tiempo se le dio a la institución para cubrir el préstamo?

¿Cuánto tiempo se tiene que esperar después de depositar $215,000 en una cuenta de inversión con una tasa de 6.4% trimestral para que se puedan retirar $520,000?

Una persona deposita $920,000 en una cuenta de inversión con una tasa de 0.22% semanal, ¿en cuánto tiempo contará con un monto de $1, 670,000?

¿En cuánto tiempo $1, 250,000 equivalen a $790,000 hoy, sabiendo que el interés que gana el dinero es de 2.3% mensual?

Sesión 2.12. Cálculo de la tasa de interés

La tasa de interés se calcula mediante la siguiente expresión:

$$i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Hace un año se realizó un depósito de $450,000 y hoy la cuenta presenta un saldo de $725,000 ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Se identifican las variables del ejercicio:

$$P = \$450{,}000, \qquad F = \$725{,}000, \qquad n = 12$$

$n = 12$ ya que como se trata de un interés de tipo mensual y menciona que fue por un año, el periodo consiste en 12 meses.

Ahora se procede a sustituir todos los datos en la fórmula:

$$i = \left(\frac{725{,}000}{450{,}000}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.6111)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1.0405 - 1 = 0.0405$$

De este modo se ha podido calcular que el interés de la inversión fue de 0.0405 es decir del 4.05%.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Hace un año se realizó un depósito de \$230,000 y hoy la cuenta presenta un saldo de \$690,000 ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Hace dos años se depositaron \$115,000 y hoy en la cuenta hay \$370,000 ¿cuál es la tasa de interés anual?

Una persona aportó \$2, 000,000, al finalizar su quinto año decidió retirar su inversión la cual fue de \$5, 120,000, ¿cuál fue el rendimiento de su inversión?

Se invierten \$500,000 en una cuenta de inversión, tras 6 semestres se obtiene un monto de \$895,000 ¿cuál fue la tasa de interés semestral?

Se invierten $950,000 en una cuenta de inversión y luego de 5 años la cuenta presenta un saldo de $2, 405,000 ¿cuál fue la tasa de interés mensual?

Sesión 2.13. Interpolación Lineal

Se emplea para aproximar o ajustar puntos que se encuentran en una curva o recta con el propósito de hallar una solución a un conjunto de problemas, en este caso para obtener la tasa de interés.

La interpolación lineal es dada por la siguiente ecuación:

$$i = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Una persona invierte $255,000 y espera acumular al final del año $900,000 ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Primeramente se calcula el cociente $\frac{F}{P}$:

$$\frac{F}{P} = \frac{900,000}{255,000} = 3.52$$

Ya que se conoce el factor F/P se procede a consultar las tablas para interés compuesto en el siguiente Link:

http://www.economia.unam.mx/profesores/jzurita/tablasf.pdf

En estas tablas se deben buscar los valores mínimo y máximo que se aproximan a 3.52, como se trata de un año $n = 12$ y por lo tanto, se debe buscar en la fila 12 de todas las tablas. En este caso, el valor mínimo se encuentra en la tabla correspondiente a una tasa del 10%.

TABLA A-16
Factores de Interés Compuesto 10%

n	Pago Único		Serie Uniforme				n
	Factor de Valor Futuro F/P	Factor de Valor Presente P/F	Factor de Fondo Acumulativo A/F	Factor de Recuperación de Capital A/P	Factor de Valor Futuro F/A	Factor de Valor Presente P/A	
1	1.1000	0.9091	1.00000	1.10000	1.000	0.909	1
2	1.2100	0.8264	0.47619	0.57619	2.100	1.736	2
3	1.3310	0.7513	0.30211	0.40211	3.310	2.487	3
4	1.4643	0.6830	0.21547	0.31547	4.641	3.170	4
5	1.6105	0.6209	0.16380	0.26380	6.105	3.791	5
6	1.7716	0.5645	0.12961	0.22961	7.716	4.355	6
7	1.9487	0.5332	0.10541	0.20541	9.487	4.868	7
8	2.1436	0.4665	0.08744	0.18744	11.436	5.335	8
9	2.3579	0.4241	0.07364	0.17364	13.579	5.759	9
10	2.5937	0.3855	0.06275	0.16275	15.937	6.144	10
11	2.8531	0.3505	0.05396	0.15396	18.531	6.495	11
12	3.1384	0.3186	0.04676	0.14676	21.384	6.814	12
13	3.4523	0.2897	0.04078	0.14078	24.523	7.103	13
14	3.7975	0.2633	0.03575	0.13575	27.975	7.367	14
15	4.1772	0.2394	0.03147	0.13147	33.772	7.606	15
16	4.5950	0.2176	0.02782	0.12782	35.950	4.824	16
17	5.0545	0.1978	0.02466	0.12466	40.545	8.022	17
18	5.5599	0.1799	0.02193	0.12193	45.599	8.201	18
19	6.1159	0.1635	0.01955	0.11955	51.159	8.365	19
20	6.7275	0.1486	0.01746	0.11746	57.275	8.514	20

Y el valor máximo se encuentra en la Tabla de interés compuesto a 12% que se muestra a continuación:

TABLA A-17
Factores de Interés Compuesto 12%

n	Pago Único		Serie Uniforme				n
	Factor de Valor Futuro F/P	Factor de Valor Presente P/F	Factor de Fondo Acumulativo A/F	Factor de Recuperación de Capital A/P	Factor de Valor Futuro F/A	Factor de Valor Presente P/A	
1	1.1200	0.8929	1.00000	1.12000	1.000	0.893	**1**
2	1.2544	0.7972	0.47170	0.59170	2.120	1.690	**2**
3	1.4049	0.7118	0.29635	0.41635	3.374	2.402	**3**
4	1.5735	0.6355	0.20923	0.32923	4.779	3.037	**4**
5	1.7623	0.5674	0.15741	0.27741	6.353	3.605	**5**
6	1.9738	0.5066	0.12323	0.24323	8.115	4.111	**6**
7	2.2107	0.4523	0.09912	0.21912	10.089	4.564	**7**
8	2.4760	0.4039	0.08130	0.20130	12.300	4.968	**8**
9	2.7731	0.3606	0.06768	0.18768	14.776	5.328	**9**
10	3.1058	0.3220	0.05698	0.17698	17.549	5.650	**10**
11	3.4785	0.2875	0.04842	0.16842	20.655	5.938	**11**
12	3.8960	0.2567	0.04144	0.16144	24.133	6.194	**12**
13	4.3635	0.2292	0.03568	0.15568	28.029	6.424	**13**
14	4.8871	0.2046	0.03087	0.15087	32.393	6.628	**14**
15	5.4736	0.1827	0.02682	0.14682	37.280	6.811	**15**
16	6.1304	0.1631	0.02339	0.14339	42.753	6.974	**16**
17	6.8660	0.1456	0.02046	0.14046	48.884	7.120	**17**
18	7.6900	0.1300	0.01794	0.13794	55.750	7.250	**18**
19	8.6128	0.1161	0.01576	0.13576	63.440	7.366	**19**
20	9.6463	0.1037	0.01388	0.13388	72.052	7.469	**20**

De este modo ya se identifican los siguientes datos:

En la columna $i\%$ se colocan las tasas donde se obtuvieron los valores mínimo y máximo a 3.52.

Variables	$i\%$	Variables	(F/P, i, n)
R_1	10%	X_1	3.1384
		X	3.52
R_2	12%	X_2	3.8960

Posteriormente, se procede a sustituir variables en la fórmula:

$$i = 0.10 + \frac{0.12 - 0.10}{3.8960 - 3.1384}(3.52 - 3.1384)$$

$$i = 0.10 + \frac{0.02}{0.7576}(0.3816)$$

$$i = 0.10 + (0.02639)(0.3816) = 0.11007$$

El resultado obtenido indica que la tasa se encuentra en 11.007% mensual.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejercicios:

Serie de ejercicios

Una persona invierte \$100,000 y espera acumular en 2 años \$255,000 ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Se invierte \$2, 450,000 y se espera que en 12 semestres se obtengan \$10, 025,000 ¿cuál es la tasa de interés semestral?

Un sujeto invierte \$1, 000,000, al cabo de 3 años cuenta con \$2, 900,000 ¿cuál es la tasa de interés anual?

Una empresa invierte \$12, 000,000 en una cuenta de inversión, al cabo de 2 años ya cuenta con \$15, 500,000 ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Se invierten \$1, 500,000 y al cabo de 2 años y medio esta cantidad se duplica ¿cuál es la tasa de interés mensual?

Bloque III: Interés simple

Introducción

En este bloque se analizarán temas asociados al interés simple, este tipo de interés – a diferencia del interés compuesto – es aquel que se paga al final de cada periodo y por consiguiente el capital prestado o invertido no varía y, por la misma razón, la cantidad recibida por interés siempre va a ser la misma; es decir, no hay capitalización de los intereses. Es importante anotar que desde el punto de vista teórico existen dos tipos de interés: el simple y el compuesto. Dentro del contexto práctico, el interés compuesto es el que se usa en todas las actividades económicas, comerciales y financieras. El interés simple, por no capitalizar intereses resulta siempre menor al interés compuesto, puesto que, la base para su cálculo permanece constante en el tiempo a diferencia del interés compuesto. El interés simple es utilizado por el sistema financiero informal, por los prestamistas particulares y prendarios.

El presente bloque se compone de nueve sesiones, cada una diseñada para poder facilitar a sus alumnos un módulo de 50 minutos de clase.

Objetivo

Que el alumno comprenda la aplicación del interés simple en productos financieros como los préstamos o los créditos; para ello podrá:

1. Explicar los conceptos de interés simple, monto o valor futuro, valor presente o valor actual, tiempo.
2. Plantear y resolver ejercicios relacionados con el cálculo del valor futuro, valor presente, tiempo tasa de interés y los diferentes tipos de descuento.
3. Plantear y resolver ejercicios relacionados con las ecuaciones de valor a interés simple.

Competencias

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Proponer maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Interdisciplinariedad

El presente bloque cuenta con interdisciplinariedad con la materia de Informática ya que las TIC son una de las principales herramientas para asistir al cálculo de la amortización, así como la aplicación de las mismas en diferentes problemáticas de la vida cotidiana.

Conceptos clave:

Matemáticas Financieras; sucesiones aritméticas; interés simple.

Actividades de Aprendizaje

Sesión 3.1. Interés Simple

Cuando se habla de interés se hace referencia a la renta o los réditos que hay que pagar por el uso del dinero prestado. También se puede decir que el interés es el rendimiento que se tiene al invertir en forma productiva el dinero; el interés tiene como símbolo *I*.

El interés simple es la tasa aplicada sobre un capital de origen que permanece constante en el tiempo y no se añade a períodos sucesivos, es decir, "es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo" (Pompa Osorio y Arévalo Guerrero, 2005. Pág. 11). Este tipo de interés se calcula para pagos o cobre sobre el capital adquirido inicial en todos los periodos considerados, mientras que en el interés compuesto los intereses se suman al capital para generar nuevos intereses.

La característica de la falta de capitalización de los intereses implica que con el tiempo se perderá el poder adquisitivo y al final de la operación se obtendrá una suma total no equivalente al original, por ende, el valor acumulado no será representativo del capital principal. El interés a pagar por una deuda o inversión depende de la cantidad solicitada en alguno de los productos financieros antes descritos, así como el tiempo que dure el producto.

Los conceptos o elementos que intervienen en una operación de interés simple son:

Capital: es la suma prestada o invertida, también se le denomina principal y en otros contextos conocido como valor presente o valor actual.

Tiempo: es la duración del lapso para el que se calcula el interés y que se mide de la fecha inicial de recepción del préstamo (o inversión), hasta la fecha de pago final y puede estar expresada en días o distintas unidades de tiempo.

Tasa: sea el número de unidades pagadas por cada 100 unidades de la suma prestada, en la unidad de tiempo, cuando se expresa en decimales se le denomina tasa y cuando se expresa en porcentaje se le llama tipo.

Monto: es la suma del capital más los intereses, también se le denomina valor futuro o valor acumulado.

Relación tiempo - tasa: es aquella vinculación de correspondencia que existe entre la unidad de tiempo utilizada años, meses, días, etc., y la tasa expresada precisamente en la unidad de tiempo utilizada en el problema matemático, es decir, para un plazo en años, corresponde tasa en años; para plazo en meses corresponde tasa en meses y así sucesivamente.

El interés simple es dado por la siguiente expresión:

$$□ = □ \cdot □ \cdot □$$

Donde □ es el capital inicial; □ la tasa de interés; y □ es el tiempo de existencia del producto financiero adquirido.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos de interés simple:

Ejemplo 1:

Si se depositan en una cuenta de ahorros $2,550,000 y la institución crediticia paga el 3% mensual ¿cuál es el pago mensual por intereses?

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$□ = \$2,550,000, \quad □ = 0.03, \quad □ = 1\ □□□$$

En este caso, como la tasa de interés es mensual y el tiempo es de 1 mes, no hace falta realizar modificaciones, ya que ambas variables presentan el mismo tipo de tiempo (mensual).

Posteriormente, se sustituyen las variables en la fórmula de interés simple:

$$\square = (2,550,000)(0.03)(1) = 76,500$$

El depositante recibirá cada mes $76,500 por interés.

Ejemplo 2:

Se invierten $650,000 por un año a una tasa de 1.6% mensual por un año ¿cuál será el pago por interés?

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$\square = \$650,000, \qquad \square = 0.016$$

En este caso la tasa de interés es mensual pero la inversión es por un año, como es sabido que un año tiene 12 meses, entonces:

$$\square = 12$$

Ahora se procede a realizar las sustituciones en la fórmula:

$$\square = (650,000)(0.016)(12) = 124,800$$

Por lo tanto, el pago total por intereses es de $124,800.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. Se adquiere un préstamo por $260,000 a interés compuesto con una tasa de interés del 2% mensual ¿cuál será el pago de interés mensual?
2. Se depositan $10, 000,000 con una tasa de interés mensual del 1.9% ¿cuál será el pago de intereses tras un año de la inversión?
3. ¿Qué interés generan $930,000 en 6 meses con una tasa de interés del 2.3% mensual?

4. Se realiza un depósito por $970,550 con una tasa de interés del 15% semestral ¿qué interés se pagará al cabo de un año?
5. Se invierten $780,000 en una cuenta de ahorros con una tasa de interés de 1.5% mensual ¿qué intereses se pagarán tras un año de realizada la inversión?

Sesión 3.2. Tipos de interés simple

El interés se llama ordinario cuando se usa para su cálculo 360 días al año, mientras que será exacto si se emplean 365 o 366 días. En realidad, se puede afirmar que existen cuatro clases de interés simple, dependiendo si para el cálculo se usan 30 días al mes, o los días que señale el calendario. Observe los diferentes tipos de interés simple:

a) El Interés ordinario con tiempo exacto consiste en casos donde se supone un año de 360 días y se toman los días que realmente tiene el mes según el calendario. Este interés se conoce con el nombre de interés bancario; es un interés más costoso y el que más se utiliza.

b) El interés ordinario con tiempo aproximado es el tipo de interés donde se supone que el año tiene 360 días y 30 días al mes. Este tipo de interés también es conocido como interés comercial ya que se emplea para cálculos manuales para hacer simplificaciones.

c) El interés exacto con tiempo exacto consiste en emplear 365 o 366 días al año y mes según el calendario. También se le denomina como interés racional, exacto o real, ya que, a diferencia de los otros, este genera un resultado exacto lo cual es importante en cálculos de capitales grandes.

d) El interés exacto con tiempo aproximado consiste en emplear 365 o 366 días al año y 30 días al mes.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Una persona obtiene un préstamo por $136,000 para el mes de mayo, con una tasa de interés de 20% anual simple. Calcule el interés para cada tipo de interés simple.

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$\square = \$136{,}000, \qquad \square = 0.20$$

Para el interés tipo a, la fórmula quedaría de la siguiente forma:

$$\square = (136{,}000)(0.20)\left(\frac{31}{360}\right) = \$\ 2{,}342.22$$

Para el interés simple tipo b, la fórmula quedaría configurada:

$$\square = (136{,}000)(0.20)\left(\frac{30}{360}\right) = \$\ 2{,}266.66$$

Para el interés c, la fórmula sería:

$$\square = (136{,}000)(0.20)\left(\frac{31}{365}\right) = \$\ 2{,}310.13$$

Y, por último, para el interés d:

$$\square = (136{,}000)(0.20)\left(\frac{30}{365}\right) = \$\ 2{,}235.62$$

Ejemplo 2:
Se adquiere un crédito por $52,000 para el mes de febrero, con una tasa de interés de 18% anual simple. Calcule el interés ordinario con tiempo exacto.

$$\square = \$52{,}000, \qquad \square = 0.18$$

Para el interés a, como febrero tiene 28 días, la fórmula quedaría configurada de la siguiente forma:

$$\square = (52{,}000)(0.18)\left(\frac{28}{360}\right) = \$\ 728.00$$

Ejemplo 3:
Calcule el interés comercial y real por un préstamo por $42,000 con una tasa de interés del 20% por 70 días.

$$\square = \$42{,}000, \qquad \square = 0.20, \qquad \square = 70$$

En este caso el interés comercial se refiere al inciso b, y la fórmula quedaría configurada de la siguiente forma:

$$\square = (42{,}000)(0.20)\left(\frac{70}{360}\right) = \$\ 1{,}633.33$$

Y para el interés real se refiere a la fórmula del inciso c, quedando la fórmula configurada como se muestra a continuación:

$$\square = (42{,}000)(0.20)\left(\frac{70}{365}\right) = \$\ 1{,}610.96$$

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. Una persona adquiere un crédito por $1,020,000 en el mes de agosto con una tasa de interés del 22%. Calcule el interés para cada tipo de interés simple. Rellene sus resultados en la siguiente tabla:

Tipo de interés simple	Resultado
Interés ordinario con tiempo exacto.	
Interés ordinario con tiempo aproximado.	
Interés exacto con tiempo exacto.	
Interés exacto con tiempo aproximado.	

2. Se adquiere un préstamo por $850,330 en el mes de junio con una tasa de interés del 12%. Calcule el interés para cada tipo de interés simple. Rellene sus resultados en la siguiente tabla:

Tipo de interés simple	Resultado
Interés ordinario con tiempo exacto.	
Interés ordinario con tiempo aproximado.	
Interés exacto con tiempo exacto.	
Interés exacto con tiempo aproximado.	

3. Una empresa solicita un préstamo por $222,000 en el mes de mayo con una tasa del 14%. Calcule el interés simple ordinario con tiempo aproximado.
4. Se requiere un crédito por $95,000 en el mes de octubre con una tasa de interés del 9%. Calcule el interés simple exacto con tiempo exacto.

5. Calcule todos los tipos de interés simple por un préstamo por $79,800 con una tasa de interés del 13% por 120 días. Rellene sus datos en la siguiente tabla:

Tipo de interés simple	Resultado
Interés ordinario con tiempo exacto.	
Interés ordinario con tiempo aproximado.	
Interés exacto con tiempo exacto.	
Interés exacto con tiempo aproximado.	

Sesión 3.3. Tabla de días

Como se explicó y se ejemplificó en las dos sesiones anteriores, el interés simple depende del tiempo, por ello, uno de los recursos de mayor uso en el cálculo del interés simple es la *tabla de días*, la cual se muestra a continuación:

Día del mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Día del mes
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	3353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

La tabla consiste en designar a cada día un número de forma consecutiva que inicia en 1, correspondiente al 1 de enero hasta el 365 correspondiente al 31 de diciembre. Para años bisiestos es necesario incrementar un día a partir del 1 de marzo, lo cual generaría que el 31 de diciembre se volviera el día 366.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Empleando la *tabla de días* calcule los días transcurridos entre el 18 de marzo y el 13 de octubre del mismo año.

Se comienza buscando el número de día correspondiente al 13 de octubre, el cual es el día 286.

Posteriormente, se procede a localizar el día correspondiente al 18 de marzo, el cual sería el día 77.

Se procede a realizar una diferencia entre ambos días:

$$286 - 77 = 209$$

Entre ambas fechas han transcurrido 209 días.

Ejemplo 2:
Calcule los días transcurridos entre el 10 de junio de 2010 y el 12 de diciembre de 2011.

Al tratarse de un periodo interanual se inicia calculando la diferencia entre el último día del año correspondiente al día 365 (31 de diciembre) y se le resta del 10 de junio, es decir, el día 161.

$$365 - 161 = 204$$

Posteriormente, se localiza el día correspondiente al 12 de diciembre, que sería el 346, y se realiza la suma de los 204 días y los 346 días.

$$204 + 346 = 550$$

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule los días transcurridos de los siguientes periodos:

1. 22 de abril al 02 de septiembre.
2. 10 de enero del 2014 al 05 de septiembre del 2016.
3. 20 de julio al 15 de noviembre.
4. 11 de agosto del 2013 al 20 de abril del 2014.

5. 04 de marzo al 07 de agosto.
6. 09 de abril al 28 de diciembre.
7. 05 de febrero de 2012 al 29 de agosto del 2013 (recuerde que el 2012 fue año bisiesto).
8. 11 de julio del 2015 al 13 de octubre del 2016 (recuerde que 2016 fue año bisiesto).

Sesión 3.4. Valor futuro a interés simple

El valor futuro simple es la suma del capital inicial más el interés simple obtenido y se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\square = \square(1 + \square \cdot \square)$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Calcule el monto de una inversión de $150,500 en 5 años con una tasa del 25% anual.

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$150{,}500, \qquad \square = 0.25, \qquad \square = 5$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = (150{,}500)\big(1 + (0.25)(5)\big) = 338{,}625$$

De este modo, de los $150,500 en 5 años con una tasa de interés simple del 25%, se obtendrían $338,625.

Ejemplo 2:
¿Cuál es el valor futuro de una inversión de $225,000 en 6 años con una tasa de interés mensual del 2.4%?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$225{,}000, \qquad \square = 0.024$$

En el caso del tiempo, como la tasa de interés es mensual y se solicita el valor futuro a 6 años es necesario obtener la equivalente. En un año hay 12 meses por lo tanto, en 6 años hay 72 meses, de modo que:

$$\square = 72$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = (225{,}000)\big(1 + (0.024)(72)\big) = 613{,}800$$

De este modo, en 6 años se obtendrían $613,800.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. Una persona invierte $62,000 por 3 años con una tasa mensual del 1.9% ¿qué monto obtendría al finalizar la inversión?
2. Calcule el monto por una inversión de $820,000 al cabo de 5 años con una tasa anual del 17%.
3. Calcule el monto futuro por un capital inicial de $790,800 después de 8 años con una tasa mensual del 2.1%.
4. ¿Cuál es el valor futuro de una inversión de $98,000 en 4.5 años con una tasa de interés anual del 22%?
5. Una empresa invierte $10,300 por 7 años con una tasa anual del 30% ¿qué monto obtendría al finalizar la inversión?

Sesión 3.5. Valor presente a interés simple

Para obtener el Valor Presente es necesario un despeje de la fórmula de valor futuro, de modo que la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\square = \frac{\square}{1 + \square \cdot \square}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Calcule el valor presente de $554,300 en 6 año con una tasa de interés de 3.2% mensual.

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$554{,}300, \qquad \square = 0.032$$

En el caso del tiempo, como la tasa es mensual hay que multiplicar la cantidad de años por la cantidad de meses, es decir:

$$\square = (6)(12) = 72$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\square}{1 + \square \cdot \square} = \frac{554,300}{1 + (0.032)(72)} = \frac{554,300}{3.304} = 166,766.34$$

De modo que el monto inicial fue de $166,766.34.

Ejemplo 2:
¿Cuál es el valor presente de un monto de $900,000 obtenido tras 4.5 años a una tasa de interés del 25% anual?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$900,000, \qquad \square = 0.25, \quad \square = 4.5$$

Después, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\square}{1 + \square \cdot \square} = \frac{900,000}{1 + (0.25)(4.5)} = \frac{900,000}{2.125} = 423,529.41$$

De modo que el monto inicial fue de $423,529.41.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. Obtenga el monto presente de $1, 450,000 en 6 años y una tasa de 32% anual.
2. ¿Cuál es el monto presente de $660,000 en 3.5 años con una tasa del 2.4% mensual?
3. Calcule el monto presente de $780,500 en 8 años con una tasa mensual del 1.9%.
4. ¿Cuál es el monto presente de $2, 090,000 en 12 años con una tasa anual del 25%?

Sesión 3.6. Tasa de interés simple

Cuando se cuenta con el valor presente y futuro de un recurso, así como el tiempo de existencia del producto financiero es posible calcular la tasa de interés mediante:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
Por un monto de \$570,000, se paga después de 18 meses un total de \$726,500 ¿Qué tasa de interés mensual se usó?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$570{,}000, \qquad \square = 726{,}500, \qquad \square = 18$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square} = \frac{\frac{726{,}500}{570{,}000} - 1}{18} = \frac{0.275}{18} = 0.0153$$

De modo que la tasa de interés mensual fue de 1.53%.

Ejemplo 2:
¿Cuál es la tasa de interés anual por un monto inicial de \$825,000 que después de 2 años fue equivalente a \$1, 470,00?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$825{,}000, \qquad \square = 1{,}470{,}000, \qquad \square = 2$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square} = \frac{\frac{1{,}470{,}000}{825{,}000} - 1}{2} = \frac{0.782}{2} = 0.3909$$

De modo que la tasa de interés anual fue de 39.09%.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. Por un monto de $750,080 se paga después de 3.5 años un total de $1, 190,500 ¿Qué tasa de interés mensual se usó?
2. ¿Cuál es la tasa de interés anual por un monto inicial de $290,000 que después de 3.2 años fue equivalente a $495,225?
3. Calcule la tasa de interés mensual por un monto de $314,000 que después de 26 meses fue $512,400.
4. Calcule la tasa de interés anual por un monto de $209,000 que después de 18 meses fue de $340,200.
5. Por una inversión de $7, 392,000 a 3 años se obtiene un monto de $9, 490,000, ¿Cuál es la tasa de interés anual por esta transacción?

Sesión 3.7. Tiempo de interés simple

El cálculo del tiempo de interés simple consiste en una configuración de la fórmula de interés simple, queda de la misma de la siguiente forma:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:
¿En cuánto tiempo se acumularán $360,000 si hoy se depositan $190,000 en un fondo al 3% de interés mensual?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio:

$$\square = \$190{,}000, \qquad \square = 360{,}000, \qquad \square = 0.03$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square} = \frac{\frac{360{,}000}{190{,}000} - 1}{0.03} = \frac{0.894}{0.03} = 29.82$$

Se requerirían casi 30 meses para obtener dicho capital.

Ejemplo 2:

¿En cuánto tiempo se triplica un capital invertido al 22% anual simple?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio, en este caso al no ser expresados los capitales con exactitud, se emplea el valor presente como 1 y el valor futuro al ser el triple, se expresa como 3.

$$\square = 1, \qquad \square = 3, \qquad \square = 0.22$$

Posteriormente, se sustituyen estos valores en la fórmula:

$$\square = \frac{\frac{\square}{\square} - 1}{\square} = \frac{\frac{3}{1} - 1}{0.22} = \frac{2}{0.22} = 9.09$$

El capital se triplicaría en 9.09 años.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. ¿En cuánto tiempo se tendrían $722,000 si se depositarán hoy $500,000 en un fondo de inversión al 4.3% mensual?
2. Una empresa obtuvo de un fondo de inversión $1, 200,000 para el cual invirtieron un capital inicial de $965,500 al 22% anual, ¿Cuánto tiempo les tomó obtener dicho fondo?
3. Calcule el tiempo requerido para que un capital de $290,300 se vuelvan $410,000, al 31% anual simple.
4. ¿En cuánto tiempo se duplicará un capital inicial de $150,000 al emplear una tasa de interés mensual simple del 2.9%?
5. Calcule el tiempo necesario para que $100,000 se vuelvan $272,000, si se emplea una tasa de interés del 18% anual.

Sesión 3.8. – Descuento simple

Descuento es la disminución que se concede a un pago o deuda por diferentes circunstancias. Entre las más frecuentes se tienen las promociones, liquidaciones, entre otros.

Existen tres tipos de descuento en el interés simple:

a) El descuento comercial o bancario ($\square$). Es el que se aplica sobre el valor nominal del documento. Puede decirse que es el interés simple del valor nominal. En el descuento comercial o bancario el interés se cobra por adelantado en lugar de cobrarlo hasta la fecha de vencimiento. Se expresa como:

$$\square = \square_{\square} \cdot \square \cdot \square = \square_{\square} \cdot \square \cdot \square$$

El valor presente o valor de la transacción es obtenido mediante:

$$\square_{\square} = \square_{\square} - \square = \square_{\square} - \square_{\square} \cdot \square \cdot \square = \square_{\square}(1 - \square \cdot \square)$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
El descuento comercial simple a un 6.5% anual durante 6 meses alcanza la suma de $220,000. Calcule el valor efectivo y nominal de la operación.

El valor nominal ($\square_{\square}$) se determina configurando la ecuación de la siguiente fórmula:

$$\square_{\square} = \frac{\square}{\square \cdot \square} = \frac{200,000}{0.065 \cdot 0.5} = \frac{200,000}{0.0325} = \$6,153,846.15$$

En el caso de $\square$ es 0.5 ya que el descuento consta de 6 meses, es decir, medio año.

En el caso del valor efectivo ($\square_{\square}$) se calcula de la siguiente manera:

$$\square_{\square} = \square_{\square}(1 - \square \cdot \square) = 6,153,846.15\,\big(1 - (0.065)(0.5)\big)$$

$$= 6,153,846.15\,(0.9675) = \$5,953,846.15$$

b) El descuento real o justo ($\square_{\square}$). Se calcula sobre el valor real que se anticipa, y no sobre el valor nominal, mediante la siguiente ecuación:

$$\square_{\square} = \square_{\square} - \square$$

Donde el valor presente se calcula mediante:

$$\square = \frac{\square}{1 + \square \cdot \square}$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2:
El valor nominal de un descuento es de $112,800 si se descuenta 2 meses antes de su vencimiento a una tasa del 22%, calcule el descuento real.

Primero, es necesario calcular el descuento comercial:

$$\square = \square_{\square} \cdot \square \cdot \square = (112{,}800)(0.22)\left(\frac{2}{12}\right) = \$4{,}136$$

Posteriormente, se calcula el valor comercial del documento:

$$\square_{\square} = \square_{\square} - \square = 112{,}800 - 4{,}136 = \$108{,}664$$

Luego, se calcula el valor presente:

$$\square = \frac{\square}{1 + \square \cdot \square} = \frac{112{,}800}{1 + \left(0.22 \cdot \frac{2}{12}\right)} = \frac{112{,}800}{1.0366} = \$108{,}810.29$$

Ahora es posible obtener el descuento real:

$$\square_{\square} = \square_{\square} - \square = 112{,}800 - 108{,}810.29 = \$3{,}989.71$$

c) El descuento racional o matemático. Es aquel que se determina sobre el valor efectivo de un descuento, y se calcula mediante:

$$\square_{\square} = \left[\frac{\square}{1 + \square \cdot \square}\right]$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3:
Calcule el descuento racional de un descuento comercial de $6,580, si se descuenta 3 meses antes de su vencimiento con una tasa de interés del 14%.

Se emplea la fórmula antes mostrada:

$$\square_{\square} = \left[\frac{\square}{1 + \square \cdot \square}\right] = \left[\frac{6{,}580}{1 + 0.14 \cdot \frac{3}{12}}\right] = \frac{6{,}580}{1.035} = \$6{,}357.49$$

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

1. El descuento comercial simple a un 4.3% anual durante 8 meses alcanza la suma de $149,000. Calcule el valor efectivo y nominal de la operación.
2. El valor nominal de un descuento es de $452,000 si se descuenta 7 meses antes de su vencimiento a una tasa del 29%, calcule el descuento real.
3. Calcule el descuento racional de un descuento comercial de $10,890 si se descuenta 5 meses antes de su vencimiento con una tasa de interés del 24%.

Sesión 3.9 Diferencia entre interés simple e interés compuesto

El interés en el interés compuesto se calcula sobre el monto y, en el interés simple se calcula sobre el capital original. Es decir, el interés compuesto es aquel en el cual el capital cambia al final de cada periodo, debido a que los intereses se adicionan al capital para formar un nuevo capital denominado monto y sobre este monto volver a calcular intereses; es decir, hay capitalización de los intereses. Por ello, el interés compuesto tiene un efecto multiplicador en las inversiones.

La fórmula para calcular el interés compuesto es:

$$\boldsymbol{C_n = C_0\ (1 + i)^n}$$

Siendo C_0 el capital inicial prestado, *i* la tasa de interés, *n* el periodo de tiempo considerado y C_n el capital final resultante.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

1.- Manuel desea conocer el monto de capital que recibirá si invierte $85,000 en un periodo de tres años con una tasa de interés compuesto del 4%.

$C_n = C_0\ (1 + i)^n$

$C_{n=}$ (85,000)(1+0.04)^5

C_n = (85,000) (1.04)^5

C_n = (85,000) (1.22)

C_n = $103,415.49

2.- Una persona está obligada a saldar una deuda de $50.000 dentro de tres años. ¿Cuánto tendría que invertir hoy a interés compuesto al 6% anual para llegar a disponer de esa cantidad dentro de tres años y cumplir con el pago de su deuda?

$C_n = C_0 (1 + i)^n$

$C_0 = C^n / (1 + i)^n$

C_0= 50,000/(1+0.06)^3

C_0= 50,000/(1.191)

C_0= 41,981.53

Es decir, la persona deberá invertir $ 41.981 con un rendimiento del 6% a interés compuesto durante tres años para pagar el monto de $50,000.00.

Bloque IV: Finanzas personales

Introducción

En este bloque se analizarán temas que son elementales en cuanto a las finanzas públicas desde el uso de las tasas de interés como porcentaje a favor de la empresa prestamista por el préstamo o crédito; las anualidades que son los pagos que se realizan en un periodo específico para liquidar el préstamo o crédito; y las tablas de amortización con el propósito de que a través de estas pueda estimar como se comportarán los recursos que se invierten en fondos de inversión o cómo se comportará el préstamo que se ha adquirido respecto al tiempo, o si se le ingresan pagos adicionales a capital. Todo lo anterior se le facilita con el propósito de que usted sea capaz de diseñar sus estrategias financieras para sacarle provecho a sus recursos económicos.

El presente capítulo se compone de 13 sesiones, cada una diseñada para poder facilitar a sus alumnos un módulo de 50 minutos de clase.

Objetivo

Que el alumno comprenda la aplicación de las tasas de interés, las anualidades y las amortizaciones como elementos indispensables para el diseño de estrategias a favor de las finanzas personales.

Competencias

Reconoce las anualidades como cálculos indispensables para estimar el comportamiento de préstamos y aplicarlos en sus estrategias financieras.

Identifica las tasas de interés y reconoce su aplicación para el análisis de comportamiento de anualidades en préstamos y crecimiento del capital en inversiones.

Comprende el uso de las amortizaciones en inversiones y préstamos, y es capaz de analizar y explicar su comportamiento mediante términos técnicos de las matemáticas financieras

Emplea las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) como herramientas indispensables para asistir el cálculo de las tablas de amortización.

Será capaz de analizar problemáticas financieras y podrá proponer soluciones a estas a partir de los conocimientos financieros adquiridos en este bloque.

Interdisciplinariedad

El presente bloque cuenta con interdisciplinariedad con la materia de Informática ya que las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) son una de las principales herramientas para asistir al cálculo de las amortizaciones, así como la aplicación de las mismas en diferentes problemáticas de la vida cotidiana.

Conceptos Clave

Matemáticas Financieras; sucesiones aritméticas; sucesiones geométricas; interés compuesto.

Actividades de Aprendizaje

Sesión 4.1. Tasa de Interés

En palabras claras, la tasa de interés es el porcentaje que corresponde al pago del precio por el dinero; es el porcentaje al que está invertido un capital en un periodo determinado.

En otras palabras, el dinero que es prestado por una compra u operación financiera la entidad bancaria o empresa prestamista cobra un adicional por el préstamo del dinero. Este adicional es lo que se conoce como tasa de interés.

Existen diferentes tipos de intereses:

Tasa de interés periódica (i)

Es aquella que se aplica al final de cada periodo, por ende, en algunos casos se le conoce como vencida. Se conforma de dos elementos: la tasa y el periodo de aplicación. Ejemplos: 2% mensual, 4% mensual, 30% anual, etc.

Tasa de Interés Nominal (r).

Es una tasa de interés de referencia, de modo que mide el valor real del dinero, por lo tanto, suele dividirse dependiendo del periodo de referencia. El periodo de referencia suele estar en periodos de un año, salvo que se indique su periodo. Ejemplos: 4% bimestral compuesto mensualmente, 18% semestral capitalizable trimestralmente, 28% anual liquidable cuatrimestralmente.

La relación entre la tasa periódica y la tasa nominal es dada por la siguiente expresión:

$$r = i \cdot m$$

$$i = \frac{r}{m}$$

Donde r es la tasa nominal en formato decimal; i es la tasa periódica en formato decimal; y m es la frecuencia de conversión.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 28% anual convertible bimensualmente.

Primero se identifican las variables del ejercicio:

$$r = 0.28$$

Al hablar de bimensual se refiere a dos periodos por cada mes por lo tanto un año se compone de 24 periodos, por lo tanto:

$$m = 24$$

Se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.28}{24} = 0.01166$$

De este modo, la tasa periódica es igual al 1.17% bimensual.

Ejemplo 2:

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 24% anual compuesto bimestralmente.

Primero, se identifican las variables del ejercicio:

$$r = 0.24$$

Al hablar de un bimestre se refiere a un periodo cada dos meses, un año se compone de 6 periodos, por lo tanto:

$$m = 6$$

Se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.24}{6} = 0.04$$

De este modo, la tasa periódica es igual al 4% bimestral.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 35% anual convertible anualmente.

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 42% anual liquidable bimestralmente.

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 15% anual convertible trimestralmente.

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 19% anual convertible mensualmente.

Convierta en tasa periódica una tasa nominal del 35% bimestral convertible mensual.

Sesión 4.2. Tasa de interés efectivo

Es un interés periódico especial descrito como i_e, es decir, el interés efectivo para un periodo de tiempo específico. Este tipo de interés es expresado mediante:

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

¿Cuál es la tasa efectiva que obtiene una persona por un préstamo bancario que se estableció al 25% anual convertible bimestralmente?

Primero, se identifican las variables del ejercicio:

$$r = 0.25$$

Al hablar de un bimestre se sabe que este periodo se conforma de dos meses, de modo que en un año hay 6 periodos, por lo tanto:

$$m = 6$$

Ahora se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.25}{6}\right)^6 - 1 = (1.04166)^6 - 1 = 1.2775 - 1 = 0.2775$$

De este modo, se ha calculado que la tasa del 25% anual convertible bimestralmente es equivalente al 27.75%

Ejemplo 2:

¿Cuál es la tasa efectiva que se obtiene de un crédito bancario que se estableció al 22% semestral convertible mensual?

Primero, se identifican las variables del ejercicio:

$$r = 0.22$$

Un semestre se conforma de 6 meses, por lo tanto:

$$m = 6$$

Ahora se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.22}{6}\right)^6 - 1 = (1.0366)^6 - 1 = 1.2411 - 1 = 0.2411$$

De este modo, se ha calculado que la tasa del 22% semestral convertible mensual es equivalente al 24.11%

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule la tasa efectiva por un 39% de interés anual convertible trimestral.

Calcule la tasa efectiva por una tasa de interés semestral convertible semanal.

¿Cuál es la tasa efectiva por un interés del 12% anual convertible bimestral?

¿Cuál es la tasa efectiva por un 28% de interés semestral convertible bimestral?

Calcule la tasa efectiva por un 32% de interés bianual convertible bimestral.

Sesión 4.3. Tasa de interés anticipada

Es aquel que se cobra al inicio de cada periodo y se expresa mediante i_a. Se expresa mediante la tasa y periodo de aplicación. Es considerada la tasa de interés más cara debido a que su cobro es inmediato perdiéndose un costo de oportunidad[1] por no disponer de todo el dinero que se recibe en el préstamo. Esta tasa es calculada mediante:

$$r_a = i_a \cdot m$$

$$i_a = \frac{r_a}{m}$$

Donde r_a es el interés nominal anticipado; i_a es el interés periódico anticipado; y m es la frecuencia de conversión.

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Calcule el interés anticipado de un interés nominal del 33% anual convertible bimensual

Primero, se identifican las variables del ejercicio:

[1]El coste de oportunidad es el coste de la alternativa a la que renunciamos cuando tomamos una determinada decisión, incluyendo los beneficios que podríamos haber obtenido de haber escogido la opción alternativa

$$r_a = 0.33$$

Al hablar de bimensual se refiere a dos periodos por cada mes, un año se compone de 24 periodos, por lo tanto:

$$m = 24$$

Se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i = \frac{r_a}{m} = \frac{0.33}{24} = 0.01375$$

De este modo, la tasa periódica es igual al 1.38% bimensual anticipado.

Ejemplo 2:

Calcule el interés anticipado de un interés nominal del 12.5% semestral convertible mensual.

Primero, se identifican las variables del ejercicio:

$$r_a = 0.125$$

Se sabe que un semestre se conforma por 6 meses, por lo tanto:

$$m = 6$$

Se sustituyen las variables en la fórmula:

$$i = \frac{r_a}{m} = \frac{0.125}{6} = 0.0208$$

De este modo, la tasa periódica es igual al 2.08% mensual anticipado.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule el interés anticipado de 24% de interés nominal semestral convertible bimensual.

Calcule el interés anticipado de 46% anual convertible bimestral.

¿Cuál es el interés anticipado de un interés nominal del 17.3% mensual convertible bimensual?

¿Cuál es el interés anticipado de una tasa del 29% anual convertible trimestral?

Calcule el interés anticipado de una tasa del 31.4% trimestral convertible bimensual.

Sesión 4.4. Tasas equivalentes

Es cuando dos tasas que operan diferentes arrojan el mismo resultado. Mientras una tasa opera de forma vencida (periódica) la otra funciona de forma anticipada; o mientras una se capitaliza de forma mensual, la otra podría ser semestral, o una trimestral y la otra anual.

En la siguiente tabla se muestran los diferentes escenarios para cuando se da una tasa y se pretende halla otra equivalente:

Tipo	Tasa	Tasa equivalente	Fórmula
Vencida	Nominal	Nominal	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$
	Nominal	Efectiva	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = (1+i_e)^t$
	Efectivo	Efectivo	$(1+i_e)^m = (1+i_e)^t$

	Efectivo	Nominal	$(1+i_e)^m = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$
Anticipado	Nominal	Nominal	$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$
	Nominal	Periódico	$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = (1-i_a)^{-t}$
	Periódico	Periódico	$(1-i_a)^{-m} = (1-i_a)^{-t}$
	Periódico	Nominal	$(1-i_a)^{-m} = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$
Anticipado/ Vencido	Nominal vencido	Nominal anticipado	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$
	Nominal vencido	Interés periódico anticipado	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = (1-i_a)^{-t}$
	Efectivo	Interés periódico anticipado	$(1+i_e)^m = (1-i_a)^{-t}$
	Interés periódico anticipado	Efectivo	$(1-i_a)^{-m} = (1+i_e)^t$
	Nominal anticipado	Nominal vencido	$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$
	Nominal anticipado	Efectivo	$\left(1-\frac{r_a}{m}\right)^{-m} = (1+i_e)^t$
	Efectivo	Nominal anticipado	$(1+i_e)^m = \left(1-\frac{r_a}{t}\right)^{-t}$
	Interés periódico anticipado	Nominal vencido	$(1-i_a)^{-m} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^t$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Tipo Nominal – nominal

Halle una tasa nominal bimestral equivalente a una tasa del 35% convertible trimestral.

Se comienza analizando las variables m y t.

Se sabe que un bimestre equivale a dos meses, de modo que en un año hay 6 bimestres, por lo tanto, $m = 6$. Por otro lado, los trimestres equivalen a 3 meses por ende hay 4 trimestres en un año, por lo tanto, $t = 4$.

$$r = 0.35$$

Se procede a sustituir las variables en la fórmula de tipo nominal – nominal.

$$\left(1 + \frac{r}{6}\right)^6 = \left(1 + \frac{0.35}{4}\right)^4$$

Para hallar la tasa nominal es necesario aplicar la propiedad de la igualdad para volver el exponente 6 en 1. De modo que, ambos exponentes se dividen entre 6.

$$\left(1 + \frac{r}{6}\right)^{\frac{6}{6}} = \left(1 + \frac{0.35}{4}\right)^{\frac{4}{6}}$$

$$\left(1 + \frac{r}{6}\right) = \left(1 + \frac{0.35}{4}\right)^{\frac{4}{6}}$$

Posteriormente, se despeja 1, estaba sumando y queda restando, y 6 al estar dividiendo pasa del otro lado multiplicando y la ecuación queda de la siguiente forma:

$$r = \left[\left(1 + \frac{0.35}{4}\right)^{\frac{4}{6}} - 1\right]6 = \left[(1.0875)^{\frac{4}{6}} - 1\right]6 = [1.0575 - 1]6 = [0.0575]6$$

$$r = 0.3450$$

De este modo, se sabe que la tasa nominal bimestral equivalente al 35% trimestral es 34.50%.

Ejemplo 2: Tipo Nominal Anticipado – Nominal Anticipado

Halle una tasa nominal bimestral anticipada equivalente a una tasa del 28% compuesta trimestral anticipada.

Se comienza analizando las variables m y t.

Se sabe que un bimestre equivale a dos meses, de modo que en un año hay 6 bimestres, por lo tanto, $m = 6$. Por otro lado, los trimestres equivalen a 3 meses, por ende hay 4 trimestres en un año, por lo tanto, $t = 4$.

$$r = 0.28$$

Se procede a sustituir las variables en la fórmula de tipo nominal anticipado – nominal anticipado.

$$\left(1 - \frac{r_a}{6}\right)^{-6} = \left(1 - \frac{0.28}{4}\right)^{-4}$$

Para hallar la tasa nominal es necesario aplicar la propiedad de la igualdad para volver el exponente -6 en 1. De modo que, ambos exponentes se dividen entre -6.

$$\left(1 - \frac{r_a}{6}\right)^{\frac{-6}{-6}} = \left(1 - \frac{0.28}{4}\right)^{\frac{-4}{-6}}$$

$$\left(1-\frac{r_a}{6}\right)=\left(1-\frac{0.28}{4}\right)^{\frac{-4}{-6}}$$

Posteriormente, se despeja 1, estaba sumando y queda restando, y 6 al estar dividiendo pasa del otro lado multiplicando y la ecuación queda de la siguiente forma.

$$r=\left[\left(1-\frac{0.28}{4}\right)^{\frac{4}{6}}-1\right]6=\left[(0.93)^{\frac{4}{6}}-1\right]6=[0.9527-1]6=[0.04722]6=$$

$$r=0.2833$$

De este modo, se sabe que la tasa nominal bimestral equivalente al 28% trimestral es 28.33%.

Ejemplo 3: Tipo Nominal anticipado – Nominal vencido

Calcule una tasa nominal anticipada compuesta trimestralmente equivalente a 9% mensual anticipada.

Se comienza analizando las variables m y t.

Se sabe que un trimestre equivale a 3 meses, de modo que en un año hay 4 trimestres, por lo tanto, $m=4$. Por otro lado, en un año hay 12 meses por ende, $t=12$.

$$r=0.09$$

Se procede a sustituir las variables en la fórmula nominal anticipado – nominal vencido.

$$\left(1-\frac{r_a}{4}\right)^{-4}=\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{12}$$

Para hallar la tasa nominal anticipada es necesario aplicar la propiedad de la igualdad para volver el exponente -4 en 1. De modo que, ambos exponentes se dividen entre -4.

$$\left(1-\frac{r_a}{4}\right)^{\frac{-4}{-4}}=\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{\frac{12}{-4}}$$

$$\left(1-\frac{r_a}{4}\right)=\left(1-\frac{0.09}{12}\right)^{-3}$$

Posteriormente, se despeja 1, estaba sumando y queda restando, y 4 al estar dividiendo pasa del otro lado multiplicando y la ecuación queda de la siguiente forma:

$$r_a=\left[\left(1-\frac{0.09}{12}\right)^{-3}-1\right]6=[1.023-1]6=[0.02284]6=$$

$$r_a=0.1371$$

De este modo, se sabe que la tasa nominal mensual equivalente al 9% trimestral es 13.71%.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Calcule la tasa efectiva bimestral de una tasa 14.5% efectiva mensual.

Calcule la tasa nominal trimestral equivalente al 22% efectiva bimestral.

Calcule la tasa periódica anticipada bimestral equivalente al 45% nominal anticipada semestral.

Calcule la tasa periódica anticipada mensual del 17.2% periódico anticipado mensual.

Calcule la tasa periódica anticipada bimensual del 30% nominal vencido trimestral.

Calcule la tasa nominal vencida mensual equivalente al 29.3% periódico anticipado bimestral.

Sesión 4.5. Anualidades

Se le conoce a una sucesión de pagos, depósitos o retiros que se realizan en periodos regulares de tiempo con interés compuesto. El denominarlo anualidad no significa que los pagos deban ser anuales, sino que se da a cualquier secuencia de pago. En las entidades bancarias cuando se solicita un préstamo las anualidades se le conocen dependiendo del tiempo en el que se solicita, si el pago del préstamo se realiza cada 15 días sería una quincena o pago quincenal, o si se realiza cada mes se le denomina mensualidad.

El cálculo del valor presente de un producto es dado por:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Donde P es el valor presente de un producto; A son los pagos fijos que se realizan dependiendo del periodo de tiempo: quincenal, mensual, bimestral, semestral, etc.; i es la tasa de interés; y n es el número de periodos de pago.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Una señora adquiere una estufa empotrable que finiquitará en 12 pagos de $750 a una tasa de interés de 2% mensual ¿cuál es el valor de contado del aparato?

Primeramente, se identifican las variables del ejercicio.

$$A = \$750, \qquad i = 0.02, \qquad n = 12$$

Posteriormente, se sustituyen los valores anteriores en la fórmula:

$$P = 750\left[\frac{1-(1+0.02)^{-12}}{0.02}\right] = 750\left[\frac{1-0.7884}{0.02}\right] = 750[10.5753] \ldots$$

$$P = 7{,}931.47$$

De modo que, al contado el producto tiene un costo de $7,931.47. Ahora, si se multiplica el pago mensual de $750 por 12 meses se descubre que al finalizar el crédito se pagará en total $9,000. Si se resta los $9,000 menos el valor al contado del producto se obtiene $1,068.53 esto es lo que la empresa que vendió el producto ganó por el crédito de la estufa empotrable.

Una persona adquiere un vehículo a crédito con un pago inicial de $25,000 y 24 pagos de $4,900 con una tasa de interés anual de 16%. Halle el valor presente del automóvil.

Se comienza identificando las variables del ejercicio.

$$A = \$4{,}900, \qquad n = 12$$

En el caso de la tasa de interés, al ser anual, se debe dividir entre los 12 meses del año.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.16}{12} = 0.0133$$

Ahora se procede a realizar las sustituciones en la fórmula, donde además se debe incluir el pago inicial de $25,000 como se muestra a continuación:

$$P = 25{,}000 + 4{,}900\left[\frac{1-(1+0.0133)^{-24}}{0.0133}\right] = 25{,}000 + 4{,}900\left[\frac{1-(0.7282)}{0.0133}\right]$$

$$= 25{,}000 + 4{,}900\left[\frac{0.2717}{0.0133}\right] = 25{,}000 + 4{,}900[20.4285] = 25000 + 100{,}100$$

$$P = 125{,}100$$

El costo presente del automóvil es de $125,100. Ahora analizaremos la cantidad de pagos, si se multiplica el pago mensual de $4,900 por 24 meses y se incluye el pago inicial por $25,000 se obtiene un total de $142,600 y si a esto se le resta el valor presente del auto se descubre entonces que se han pagado $17,500 por el crédito para obtener el automóvil.

Los ejemplos anteriores demuestran que sobre el precio de un producto que se desea pagar a meses se incluyen los intereses. Como vimos al inicio de este bloque los intereses son el precio por el crédito automotriz o el crédito por un producto comprado en mensualidades.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Se adquiere una parrilla a 12 mensualidades de $560 con una tasa de interés mensual de 1.9%, a) ¿Cuál es el valor presente del producto? b) ¿Cuánto se pagó en total al finalizar el crédito? c) ¿Cuánto se pagó por el crédito para adquirir este producto a meses?

Se adquiere un inmueble para el cual se pagará 96 mensualidades de $2,550 a una tasa anual de 16% ¿cuál es el valor del inmueble si se hubiera comprado al contado?

Una persona adquiere una motocicleta por la cual realiza 12 pagos de $1,096 y un pago inicial de $5,000 con una tasa del 2.5% mensual, ¿Cuál es el valor de la motocicleta si esta se hubiera adquirido al contado?

Un señor compra una lavadora pagando 9 mensualidades de $760 y le abona un pago inicial de $1,050, a) ¿Cuál es el valor presente de la lavadora si tiene una tasa de interés mensual del 4%? b) ¿Cuánto se pagará al finalizar el crédito? c) ¿Cuánto del total anterior corresponde al pago del crédito por la lavadora?

Sesión 4.6. Cálculo de pagos de un crédito

El cálculo de los pagos mensuales o quincenales de un crédito se puede obtener despejando la fórmula descrita en la sesión anterior, la cual queda configurada de la siguiente forma:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Una persona desea adquirir un departamento que tiene un costo de $1, 200,000 que deberá pagar por 8 años mensualmente con una tasa de interés de 15.50% anual, ¿cuál es el pago mensual que debe aplicarse?

Se inicia identificando las variables del ejercicio.

$$P = \$1{,}200{,}000$$

En el caso de los periodos se debe convertir los 8 años a meses, lo cual serían 96 meses.

$$n = 96$$

Y se debe ajustar la tasa de interés anual a mensual:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.155}{12} = 0.0129$$

Se procede a realizar las sustituciones en la fórmula:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 1{,}200{,}000\left[\frac{0.0129}{1-(1+0.0129)^{-96}}\right] = 1{,}200{,}000\left[\frac{0.0129}{1-0.2921}\right]$$

$$= 1{,}200{,}000\left[\frac{0.0129}{0.70784}\right] = 1{,}200{,}000[0.01822]$$

$$A = 21{,}869.35$$

Lo anterior muestra que deberán pagar 96 mensualidades de $21,869.35.

Ejemplo 2:

Una persona desea adquirir un automóvil con un costo de $390,000, el cual pagará mensualmente por 5 años a una tasa de interés anual de 12.50% ¿cuál es el valor que tendrán los pagos mensuales?

Se inicia identificando las variables del ejercicio.

$$P = \$390{,}000$$

En el caso de los periodos se debe convertir los 5 años a meses, lo cual serían 60 meses.

$$n = 60$$

Y se debe ajustar la tasa de interés anual a mensual:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.125}{12} = 0.0104$$

Se procede a realizar las sustituciones en la fórmula:

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 390{,}000\left[\frac{0.0104}{1-(1+0.0104)^{-96}}\right] = 390{,}000\left[\frac{0.0104}{1-0.370}\right]$$

$$= 390{,}000\left[\frac{0.0104}{0.6296}\right] = 390{,}000[0.01651]$$

$$A = 6{,}442.18$$

Lo anterior quiere decir que por el automóvil la persona deberá pagar 60 mensualidades de $6,442.18.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Un aparato de rayos X tiene un costo de $10, 000,000, el cual se deberá pagar mensualmente por 10 años a una tasa anual de 19% ¿qué valor tendrán los pagos mensuales?

Un automóvil tiene un costo de $6, 000,000, por el cual deberá pagar mensualmente por 5 años a una tasa anual del 15.6% ¿qué valor tendrán las mensualidades?

Un señor adquiere un préstamo por $900,000, por el cual deberá pagar por 4 años a una tasa anual del 36% ¿qué valor pagará en cada mensualidad?

Una familia adquiere un préstamo de $250,000, por el cual pagarán quincenalmente por 2 años a una tasa anual de 49% ¿qué valor tendrán las mensualidades?

Sesión 4.7. Cálculo del número de periodos de una anualidad

Cuando se desea saber la cantidad de pago por un préstamo o crédito, hay dos formas de obtener el número de periodos de una anualidad (préstamo o crédito), el primero es en función del valor presente P:

$$n = \frac{-\ln \ln \left(1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{\ln \ln (1+i)}$$

La segunda opción es en función del valor futuro F, mediante la siguiente expresión:

$$n = \frac{\ln \ln \left(1 + \frac{Fi}{A}\right)}{\ln \ln (1+i)}$$

Comparta con sus alumnos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Un préstamo de $5, 000,000 se va a finiquitar con pagos mensuales de $580,185.46. Si la tasa de interés mensual es de 2.8% calcule el número de pagos del préstamo.

$$P = \$5{,}000{,}000, \qquad A = \$580{,}185.46, \qquad i = 0.028$$

Ahora se sustituyen las variables en la fórmula:

$$n = \frac{-\ln \ln \left(1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right)}{\ln \ln (1+i)} = n = \frac{-\ln \ln \left(1 - \frac{(5{,}000{,}000)(0.028)}{(580{,}185.46)(1+0.028)}\right)}{\ln \ln (1+0.028)}$$

$$= \frac{-\, ln\, ln\left(1 - \frac{(5{,}000{,}000)(0.028)}{(580{,}185.46)(1 + 0.028)}\right)}{ln\, ln\,(1 + 0.028)} = \frac{-\, ln\, ln\left(1 - \frac{(140{,}000)}{(596{,}430.65)}\right)}{ln\, ln\,(1.028)}$$

$$\frac{-\, ln\, ln\,(1 - 0.2347)}{ln\, ln\,(1.028)} = \frac{-\, ln\, ln\,(0.7652)}{ln\, ln\,(1.028)} = -\frac{-0.2675}{0.02761} =$$

$$n = 9.6885 \sim 10$$

Lo anterior significa que se deben realizar 10 pagos mensuales para finiquitar el préstamo.

Ejemplo 2:

Una persona invierte $20,000 en un fondo de inversión con una tasa de interés de 1.4% mensual. ¿En cuánto tiempo se logra obtener $160,000?

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$F = \$160{,}000, \qquad A = 20{,}000, \qquad i = 0.014$$

Posteriormente, se procede a sustituir en la fórmula:

$$n = \frac{ln\, ln\left(1 + \frac{Fi}{A}\right)}{ln\, ln\,(1 + i)} = \frac{ln\, ln\left(1 + \frac{(160{,}000)(0.014)}{20{,}000}\right)}{ln\, ln\,(1 + 0.014)} = \frac{ln\, ln\,(1 + 0.112)}{ln\, ln\,(1 + 0.014)}$$
$$= \frac{ln\, ln\,(1.112)}{ln\, ln\,(1.014)}$$

$$= \frac{0.1061}{0.0139} = 7.63 \sim 8$$

Lo anterior indica que son necesarios 8 pagos para lograr obtener $160,000.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Para finiquitar un préstamo de $60,000 se deben realizar pagos mensuales de $1,255, si este préstamo tiene una tasa de interés del 3.4% ¿cuántos pagos se deben realizar?

Por un préstamo de $120,000 se debe pagar mensualmente $2,600 ¿cuántos pagos se deben realizar si este préstamo tiene una tasa mensual de 5.2%?

Para saldar el costo de una lavadora de $17,000 se deben realizar pagos de $945.00 ¿cuántos meses deberá pagar si por el crédito de la lavadora se cuenta con una tasa de interés de 1.8% mensual?

Una persona invierte $170,000 mensuales en un fondo de inversión con una tasa de interés del 2.8% mensual, ¿cuántos pagos debe realizar para obtener $2, 600,000?

Un muchacho invierte $4,500 mensuales en un fondo universitario que cuenta con una tasa de interés mensual 4.55% ¿cuántos pagos debe realizar para alcanzar $230,000?

Sesión 4.8. Cálculo de tasa de interés en una anualidad

El procedimiento consiste en emplear la interpolación lineal para identificar la tasa de interés de una anualidad.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Una persona obtiene un crédito por $5, 400,000 que se pagará en 72 pagos mensuales de $120,000, determine la tasa de interés.

Se identifican las variables del ejercicio:

$$F = \$5,400{,}000, \qquad A = \$120{,}000, \qquad n = 72$$

Se emplea la fórmula para obtener el valor futuro.

$$F = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

$$\$5,400{,}000 = \$80{,}000\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)$$

Para emplear el método de interpolación lineal se calcula la tasa de interés usando valores de interés de referencia y se debe localizar un número que se aproxime a cero, o un valor positivo y uno negativo, ambos lo más cercano posible a cero. Para este proceso se emplearán las tablas de interés compuesto del siguiente link:

http://www.economia.unam.mx/profesores/jzurita/tablasf.pdf

También se empleará el Software MS Excel para calcular las diferencias entre el valor del crédito y el cálculo con las tasas de referencia (recordando que una debe quedar negativa lo más próxima a 0, y la otra positiva y lo más cercana a 0).

El primer valor (negativo) se encuentra al calcular con una tasa de interés del 1%

F=	$	5,400,000.00
A=	$	120,000.00
i=		1.00%
n=		72
		0.488496085
F,A,i,n	$	6,199,427.45
Diferencia	-$	799,427.45

El segundo valor (positivo) se encuentra al calcular la fórmula con una tasa de interés del 1.5% (esta tasa se usa ya que las tablas de referencia cuentan con dicho dato).

F=	$	5,400,000.00
A=	$	120,000.00
i=		1.50%
n=		72
		0.342329998
F,A,i,n	$	5,340,280.41
Diferencia	$	59,719.59

Posteriormente, se realiza la siguiente tabla para identificar las variables que se utilizarán para interpolar la tasa de interés del ejercicio.

Variables	$i\%$	Variables	Valor
R_1	1%	X_1	-$799,427.45
		X	0
R_2	1.5%	X_2	$750,750.67

Y se procede a emplear la fórmula:

$$i = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{X_2 - X_1}(X - X_1) = 1 + \frac{1.5 - 1}{750{,}750.67 + 799{,}427.45}(0 + 799{,}427.45)$$

$$i = 1 + \frac{0.5}{1{,}550{,}178.12}(799{,}427.45) = 1 + 0.257$$

$$i = 1.2578$$

De este modo, se sabe que el crédito tiene una tasa de interés del 1.2578% mensual.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios

Serie de ejercicios

Obtenga la tasa de interés de un préstamo de $250,000 que tendrá 24 pagos de $15,500.

Un empresario obtiene un préstamo de $6, 750,000 que tendrá que pagar en 18 pagos de $450,000 ¿cuál será la tasa de interés mensual del préstamo?

Calcule la tasa de interés de un crédito de $970,000 que para ser finiquitado se deberán realizar 48 pagos de $25,200.

Sesión 4.9. Amortizaciones

La amortización de una obligación o deuda se define como el proceso mediante el cual se paga la misma junto con sus intereses en una serie de pagos y en un tiempo determinado. Para visualizar de manera fácil cómo se paga una deuda se realiza una tabla de amortización, la cual, es un cuadro donde se describe el comportamiento del crédito en lo referente a saldo, cuota cancelada, intereses generados por el préstamo, abonos a capital. En ocasiones la cuota pagada en un préstamo se dedica primero a pagar los intereses y lo que sobre se considera abono a capital (Ramírez Molinares, García Barroza, Pantoja Algarín, & Zambrano Meza, 2009).

Amortización con cuotas uniformes

Son pagos iguales y periódicos que acuerdan el prestamista y el prestatario.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Realice una tabla de amortización para una deuda de $250,000 en 12 pagos con una tasa de interés del 29% anual.

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$P = \$250{,}000, \;\; n = 12$$

En el caso de la tasa de interés al ser anual se divide entre los 12 pagos del crédito.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.29}{12} = 0.0241$$

De modo que, la tasa de interés es de 2.41%.

Luego se sustituyen en la fórmula para obtener los pagos del crédito.

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 250{,}000\left[\frac{0.0241}{1-(1+0.0241)^{-12}}\right]$$

$$= 250{,}000\left[\frac{0.0241}{1-0.7514}\right] = 250{,}000\left[\frac{0.0241}{0.24856}\right] = 250{,}000[0.09695]$$

$$A = 24{,}239.16$$

De modo que, los 12 pagos son de $24,239.16

Ahora se procede a realizar la tabla de amortización. Para ello, se deben tomar en cuenta las siguientes formulaciones:

$$Interés = saldo\ anterior * i$$

$$Saldo = saldo\ anterior - amortización$$

$$Amortización = pago - intereses$$

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Amortización o capital
0	$250,000.00			
1	$231,785.83	$6,025.00	$24,239.17	$18,214.17
2	$213,571.66	$5,586.04	$24,239.17	$18,653.13
3	$194,479.57	$5,147.08	$24,239.17	$19,092.09
4	$174,927.35	$4,686.96	$24,239.17	$19,552.21
5	$154,903.93	$4,215.75	$24,239.17	$20,023.42
6	$134,397.95	$3,733.18	$24,239.17	$20,505.99
7	$113,397.77	$3,238.99	$24,239.17	$21,000.18
8	$91,891.49	$2,732.89	$24,239.17	$21,506.28
9	$69,866.90	$2,214.58	$24,239.17	$22,024.59
10	$47,311.52	$1,683.79	$24,239.17	$22,555.38
11	$24,212.56	$1,140.21	$24,239.17	$23,098.96
12	$0.00	$583.52	$24,239.17	$23,655.65

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de Ejercicios

Realice una tabla de amortización para una deuda de $1, 475,000 en 24 pagos con una tasa de interés del 18% anual.

Realice una tabla de amortización para una deuda de $990,000 en 18 pagos con una tasa de interés del 1.9% mensual.

Realice una tabla de amortización para una deuda de $130,500 en 12 pagos con una tasa de interés del 22% anual.

Sesión 4.10. Amortizaciones con cuotas adicionales pactadas

Son aquellas en las que el prestamista y el acreedor pactan al generar el crédito las fechas en las que se aplicarán pagos extras. En la actualidad las cuotas adiciones es un método empleado por muchas agencias de autos para disminuir los pagos mensuales por un automóvil.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.

Realice la tabla de amortización para un crédito automotriz de $220,600 en 24 pagos con una tasa de interés del 17% anual en el que se pactan pagos adicionales cada semestre de $10,000.

Se comienza identificando las variables del ejercicio:

$$P = \$220{,}600,\ \ n = 24$$

En el caso de la tasa de interés al ser anual se divide entre los 12 pagos del crédito.

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.17}{12} = 0.0142$$

De modo que, la tasa de interés es de 1.42%.

Luego se sustituyen en la fórmula para obtener los pagos del crédito.

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 220{,}600\left[\frac{0.0142}{1-(1+0.0142)^{-24}}\right]$$

$$= 220{,}600\left[\frac{0.0142}{1-0.71290}\right] = 220{,}600\left[\frac{0.0142}{0.2870}\right] = 220{,}600[0.04947]$$

$$A = 10{,}914.70$$

De modo que, los 24 pagos son de $10,914.70.

Ahora se procede a realizar la tabla de amortización. Para ello, se debe tomar en cuenta las siguientes formulaciones:

$$Interés = saldo\ anterior * i$$

$$Saldo = saldo\ anterior - amortización$$

$$Amortización = pago - intereses$$

Además del pago mensual se debe incluir el pago adicional de $10,000 cada 6 meses, es decir, cada 6 pagos. Por ende, la tabla de amortización queda de la siguiente forma:

Saldo	Interés	Pago o cuota	Pago adicional	Pagos totales	Amortización
$220,600					
$212,817.82	$3,132.52	$10,914.70		$10,914.70	$7,782.18
$205,035.64	$5,128.91	$10,914.70		$10,914.70	$5,785.79
$199,062.30	$4,941.36	$10,914.70		$10,914.70	$5,973.34
$192,945.00	$4,797.40	$10,914.70		$10,914.70	$6,117.30
$186,680.27	$4,649.97	$10,914.70		$10,914.70	$6,264.73
$170,264.57	$4,498.99	$10,914.70	$10,000.00	$20,914.70	$16,415.71
$163,453.25	$4,103.38	$10,914.70		$10,914.70	$6,811.32
$156,477.77	$3,939.22	$10,914.70		$10,914.70	$6,975.48
$149,334.18	$3,771.11	$10,914.70		$10,914.70	$7,143.59
$142,018.44	$3,598.95	$10,914.70		$10,914.70	$7,315.75
$134,526.38	$3,422.64	$10,914.70		$10,914.70	$7,492.06
$116,853.77	$3,242.09	$10,914.70	$10,000.00	$20,914.70	$17,672.61
$108,755.24	$2,816.18	$10,914.70		$10,914.70	$8,098.52
$100,461.54	$2,621.00	$10,914.70		$10,914.70	$8,293.70
$91,967.97	$2,421.12	$10,914.70		$10,914.70	$8,493.58

$83,269.70	$2,216.43	$10,914.70		$10,914.70	$8,698.27
$74,361.79	$2,006.80	$10,914.70		$10,914.70	$8,907.90
$55,239.21	$1,792.12	$10,914.70	$10,000.00	$20,914.70	$19,122.58
$45,655.78	$1,331.27	$10,914.70		$10,914.70	$9,583.43
$35,841.38	$1,100.30	$10,914.70		$10,914.70	$9,814.40
$25,790.46	$863.78	$10,914.70		$10,914.70	$10,050.92
$15,497.31	$621.55	$10,914.70		$10,914.70	$10,293.15
$4,956.10	$373.49	$10,914.70		$10,914.70	$10,541.21
$0.00	$119.44	$10,914.70	$10,000.00	$20,914.70	$20,795.26

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Realice la tabla de amortización para un préstamo de $150,500 en 24 pagos con una tasa de interés del 29.5% anual en el que se pactan pagos adicionales cada trimestre, de $5,000.

Realice la tabla de amortización para un crédito automotriz de $450,300 en 24 pagos con una tasa de interés del 14% anual en el que se pactan pagos adicionales cada 12 pagos de $9,000.

Realice la tabla de amortización para un crédito automotriz de $390,800 en 24 pagos con una tasa de interés del 13% anual en el que se pactan pagos adicionales de $6,000 y $10,000 en el tercero y noveno pago, respectivamente.

Sesión 4.11. Amortizaciones con cuotas adicionales no pactadas

Cuando a un crédito se le abonan pagos adicionales se pueden presentar dos situaciones, la primera es que se reconfigure el crédito con el propósito de que el crédito conserve el plazo inicial; o la segunda es la cancelación de los pagos antes del plazo previsto.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Se tiene un crédito de $1, 800,000 que se va a liquidar en 6 pagos semestrales con un interés del 20% anual, si se efectúa un abono extra de $500,000 se solicita: a) realizar la tabla de amortización si con el pago extra se solicita la reconfiguración de los pagos; b) realiza la tabla de amortización sin la cuota extra.

Se comienza identificando el interés periódico:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{0.20}{2} = 0.10$$

Lo anterior muestra que el interés periódico sería del 10% semestral. Ahora se procede a calcular los pagos.

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 1,800,000\left[\frac{0.10}{1-(1+0.10)^{-6}}\right]$$

$$= 1,800,000\left[\frac{0.10}{1-0.564}\right] = 1,800,000\left[\frac{0.10}{0.436}\right] = 1,800,000[0.2296]$$

$$A = 413,293.28$$

De modo que, los pagos quedan fijos en $413,293.28 semestrales. Posteriormente, se procede a efectuar la tabla de amortización.

Periodo	Saldo	Interes	Pago o cuota	Pago adiciona	Pagos totales	Amortización
0	$1,800,000					
1	$1,566,706.72	$180,000.00	$413,293.28		$413,293.28	$233,293.28
2	$1,333,413.44	$37,757.63	$413,293.28		$413,293.28	$375,535.65
3	$452,255.42	$32,135.26	$413,293.28	$500,000.00	$913,293.28	$881,158.02

En esta tabla de amortización se procede a identificar el saldo tras el depósito del monto adicional de $500,000 (remarcado en rojo), que como se puede apreciar es de $452,255.42, y se le anexa los periodos restantes, los cuales son 3, por lo tanto $n = 3$.

$$A = P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] = 452{,}255.42\left[\frac{0.10}{1-(1+0.10)^{-3}}\right]$$

$$= 452{,}255.42\left[\frac{0.10}{1-0.751}\right] = 452{,}255.42\left[\frac{0.10}{0.249}\right] = 452{,}255.42[0.4021]$$

$$A = 181{,}858.60$$

De modo que, la tabla de amortización queda de la siguiente forma:

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Pago adicional	Pagos totales	Amortización
0	$1,800,000					
1	$1,566,706.72	$180,000.00	$413,293.28		$413,293.28	$233,293.28
2	$1,333,413.44	$37,757.63	$413,293.28		$413,293.28	$375,535.65
3	$452,255.42	$32,135.26	$413,293.28	$500,000	$913,293.28	$881,158.02
4	$281,296.18	$10,899.36	$181,858.60		$181,858.60	$170,959.24

5	$106,216.82	$6,779.24	$181,858.60		$181,858.60	$175,079.36
6	$0.00	$2,559.83	$181,858.60		$181,858.60	$179,298.77

b) Para la disminución de los periodos de pago, la tabla de amortización quedaría:

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Pago adicional	Pagos totales	Amortización
0	$1,800,000					
1	$1,566,706.72	$180,000.00	$413,293.28		$413,293.28	$233,293.28
2	$1,333,413.44	$37,757.63	$413,293.28		$413,293.28	$375,535.65
3	$452,255.42	$32,135.26	$413,293.28	$500,000.00	$913,293.28	$881,158.02
4	$49,861.50	$10,899.36	$413,293.28		$413,293.28	$402,393.92
5	$0.00	$1,201.66	$413,293.28		$413,293.28	$412,091.62

De modo que, en vez de realizar 6 pagos se realizarían solo 5.

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de Ejercicios

Se obtiene un crédito por $720,000 a liquidar en 24 pagos mensuales con un interés del 41% anual, si se efectúa un abono adicional de $150,000 realice las tablas de amortización para: a) la reconfiguración de los pagos; b) la disminución de periodos de pago.

A un empresario se le facilita un préstamo por $1, 205,000 que liquidará en 18 pagos mensuales con una tasa de interés del 22% anual, si se realiza un abono adicional de $250,000 realice las tablas de amortización para: a) la reconfiguración de los pagos; b) la disminución de periodos de pago.

Por un crédito de $140,000 se realizarán 30 pagos mensuales con una tasa de interés del 22.5% anual, si se realiza un abono adicional de $50,000, realice las tablas de amortización para: a) la reconfiguración de los pagos; b) la disminución de periodos de pago.

Sesión 4.12. Amortizaciones mediante capital constante y periodo de gracia

Las amortizaciones con capital constante son una práctica frecuente por parte de las instituciones financieras y consiste en cobrar los intereses de manera anticipada y amortizar el capital a través de un valor constante al final de cada periodo. Este tipo de prácticas tiene como principal característica que los pagos son variables, mientras que la amortización es fija de modo que la amortización se obtiene mediante:

$$A = \frac{Deuda}{\#\, pagos}$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Un empresario solicita un préstamo por $70,000 el cual pagará durante 2 años de manera mensual con amortización constante y un interés del 30% anual. Elabore la Tabla de amortización.

Se comienza empleando la fórmula antes descrita para calcular los pagos:

$$A = \frac{Deuda}{\#\, pagos} = \frac{70{,}000}{24} = 2{,}916.66$$

Posteriormente, se calculan las cuotas:

$$cuotas = amortización + intereses$$

De este modo, la tabla de amortización quedaría de la siguiente forma:

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Amortización
0	$70,000.00			
1	$67,083.34	$1,750.00	$4,666.66	$2,916.66
2	$64,166.68	$1,616.71	$4,533.37	$2,916.66
3	$61,250.02	$1,546.42	$4,463.08	$2,916.66
4	$58,333.36	$1,476.13	$4,392.79	$2,916.66
5	$55,416.70	$1,405.83	$4,322.49	$2,916.66
6	$52,500.04	$1,335.54	$4,252.20	$2,916.66
7	$49,583.38	$1,265.25	$4,181.91	$2,916.66
8	$46,666.72	$1,194.96	$4,111.62	$2,916.66
9	$43,750.06	$1,124.67	$4,041.33	$2,916.66
10	$40,833.40	$1,054.38	$3,971.04	$2,916.66
11	$37,916.74	$984.08	$3,900.74	$2,916.66
12	$35,000.08	$913.79	$3,830.45	$2,916.66
13	$32,083.42	$843.50	$3,760.16	$2,916.66
14	$29,166.76	$773.21	$3,689.87	$2,916.66
15	$26,250.10	$702.92	$3,619.58	$2,916.66
16	$23,333.44	$632.63	$3,549.29	$2,916.66
17	$20,416.78	$562.34	$3,479.00	$2,916.66
18	$17,500.12	$492.04	$3,408.70	$2,916.66
19	$14,583.46	$421.75	$3,338.41	$2,916.66
20	$11,666.80	$351.46	$3,268.12	$2,916.66
21	$8,750.14	$281.17	$3,197.83	$2,916.66
22	$5,833.48	$210.88	$3,127.54	$2,916.66
23	$2,916.82	$140.59	$3,057.25	$2,916.66

24	$0.00	$70.30	$2,986.96	$2,916.66

En las finanzas también se pueden encontrar préstamos o créditos donde se dice "empiece a pagar en 3 meses", a este periodo sin pagos se le conoce como periodo de gracia y existen dos tipos: el **periodo de gracia muerto** en el cual no hay pagos de intereses ni abono a capital, pero los intereses causados se acumulan al capital principal, produciéndose un incremento en la deuda por acumulación de los intereses durante el periodo de gracia; y el **periodo de gracia con cuota reducida** en el cual se cobra únicamente los interés que se causan, pero no se realizan abonos a capital, evitándose con esto el incremento del valor del préstamo, debido a que los intereses se van pagando a medida que se causan.

En las amortizaciones con periodo de gracia muerto los pagos se calculan mediante:

$$P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-n}$$

Mientras que en las amortizaciones con periodos de gracia con cuota reducida se emplea:

$$P = I\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right](1+i)^{-n}$$

Donde I es dado por:

$$I = P \cdot i \cdot n$$

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2:

Se adquiere un préstamo de $50,000 a finiquitarse en 24 pagos con una tasa de interés del 2.4% mensual que se comienza a pagar a partir del 4 periodo de pago. Considere un periodo de gracia muerto.

Como en este caso, los primeros 3 periodos no se van a pagar se comienza integrando el valor de interés al saldo como se aprecia en la siguiente tabulación:

Periodo	Saldo	Interes	Pago o cuota	Amortización
0	$50,000.00			
1	$51,200.00	$1,200.00	$0.00	-$1,200.00
2	$52,400.00	$1,233.92	$0.00	-$1,233.92
3	$53,633.92	$1,262.84	$0.00	-$1,262.84

Nótese como el interés se va abonando al saldo, y por lo tanto, el saldo mostrado en el tercer periodo será el que se empleará en la siguiente fórmula empleando el saldo del periodo 3, es decir, $53,633.92.

$$53{,}633.92 = A\left[\frac{1-(1+0.024)^{-24}}{0.024}\right](1+0.024)^{-3}$$

$$53{,}633.92 = A\left[\frac{0.434}{0.024}\right](0.9313)$$

$$53{,}633.92 = A\left[\frac{0.434}{0.024}\right](0.9313)$$

$$53{,}633.92 = A(16.841)$$

$$A = \frac{53{,}633.92}{16.841} = 3{,}184.72$$

De este modo, la tabla de amortización queda de la siguiente forma:

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Amortización

0	$50,000.00			
1	$51,200.00	$1,200.00	$0.00	-$1,200.00
2	$52,400.00	$1,233.92	$0.00	-$1,233.92
3	$53,633.92	$1,262.84	$0.00	-$1,262.84
4	$51,741.78	$1,292.58	$3,184.72	$1,892.14
5	$49,804.03	$1,246.98	$3,184.72	$1,937.74
6	$47,819.59	$1,200.28	$3,184.72	$1,984.44
7	$45,787.32	$1,152.45	$3,184.72	$2,032.27
8	$43,706.08	$1,103.47	$3,184.72	$2,081.25
9	$41,574.67	$1,053.32	$3,184.72	$2,131.40
10	$39,391.90	$1,001.95	$3,184.72	$2,182.77
11	$37,156.53	$949.34	$3,184.72	$2,235.38
12	$34,867.28	$895.47	$3,184.72	$2,289.25
13	$32,522.86	$840.30	$3,184.72	$2,344.42
14	$30,121.94	$783.80	$3,184.72	$2,400.92
15	$27,663.16	$725.94	$3,184.72	$2,458.78
16	$25,145.13	$666.68	$3,184.72	$2,518.04
17	$22,566.40	$606.00	$3,184.72	$2,578.72
18	$19,925.53	$543.85	$3,184.72	$2,640.87
19	$17,221.02	$480.21	$3,184.72	$2,704.51
20	$14,451.32	$415.03	$3,184.72	$2,769.69
21	$11,614.88	$348.28	$3,184.72	$2,836.44
22	$8,710.08	$279.92	$3,184.72	$2,904.80
23	$5,735.27	$209.91	$3,184.72	$2,974.81
24	$0.00	$138.22	$3,184.72	$3,046.50

Ejemplo 3:

Resuelva el problema anterior suponiendo que el periodo de gracia es con cuota reducida.

Se comienza calculando el valor de I mediante:

$$I = P \cdot i \cdot n = (50{,}000)(0.024)(1) = 1{,}200$$

Y se emplea la fórmula que corresponde para calcular los pagos con el periodo de gracia con cuota reducida:

$$50{,}000 = 1{,}200\left[\frac{1-(1+0.024)^{-3}}{0.024}\right] + A\left[\frac{1-(1+0.024)^{-21}}{0.024}\right](1+0.024)^{-3}$$

$$50{,}000 = 1{,}200[2.862] + A[16.354](0.9313)$$

$$50{,}000 = 3{,}433.87 + 15.217A$$

$$A = \frac{50{,}000 - 3{,}433.87}{15.217} = \frac{46{,}566.13}{15.217} = 3{,}060.14$$

De este modo, la tabla de amortización queda de la siguiente forma:

Periodo	Saldo	Interés	Pago o cuota	Amortización
0	$50,000.00			
1	$50,000.00	$1,200.00	$1,200.00	$0.00
2	$50,000.00	$1,200.00	$1,200.00	$0.00
3	$50,000.00	$1,200.00	$1,200.00	$0.00
4	$48,139.86	$1,200.00	$3,060.14	$1,860.14
5	$46,239.89	$1,160.17	$3,060.14	$1,899.97
6	$44,294.13	$1,114.38	$3,060.14	$1,945.76

7	$42,301.48	$1,067.49	$3,060.14	$1,992.65
8	$40,260.81	$1,019.47	$3,060.14	$2,040.67
9	$38,170.95	$970.29	$3,060.14	$2,089.85
10	$36,030.73	$919.92	$3,060.14	$2,140.22
11	$33,838.93	$868.34	$3,060.14	$2,191.80
12	$31,594.31	$815.52	$3,060.14	$2,244.62
13	$29,295.59	$761.42	$3,060.14	$2,298.72
14	$26,941.48	$706.02	$3,060.14	$2,354.12
15	$24,530.63	$649.29	$3,060.14	$2,410.85
16	$22,061.67	$591.19	$3,060.14	$2,468.95
17	$19,533.22	$531.69	$3,060.14	$2,528.45
18	$16,943.83	$470.75	$3,060.14	$2,589.39
19	$14,292.04	$408.35	$3,060.14	$2,651.79
20	$11,576.34	$344.44	$3,060.14	$2,715.70
21	$8,795.19	$278.99	$3,060.14	$2,781.15
22	$5,947.01	$211.96	$3,060.14	$2,848.18
23	$3,030.19	$143.32	$3,060.14	$2,916.82
24	$0.00	$73.03	$3,060.14	$2,987.11

Comparta con sus alumnos la siguiente serie de ejercicios:

Serie de ejercicios

Se solicita un préstamo por $140,000.00 el cual pagará durante 24 pagos mensuales con amortización constante y un interés del 26.6% anual. Elabore la Tabla de amortización.

Se adquiere un préstamo de $920,000.00 a finiquitarse en 18 pagos con una tasa de interés del 13.55% anual que se comienza a pagar a partir del 5° periodo de pago. Considere un periodo de gracia muerto.

Una empresa adquiere un crédito por $1, 350,000 a finiquitarse en 12 pagos mensuales con una tasa de interés del 1.8% mensual. Elabore la tabla de amortización considerando que el periodo de gracia es con cuota reducida.

Sesión 4.13. Calcular Intereses de una tarjeta de crédito

Uno de los temas más importantes en cuestiones de las finanzas personales son las tarjetas de crédito. Se debe entender que la tarjeta de crédito no es una extensión de sus ingresos, sino una manera de aplazar el pago a otras fechas con el propósito de que en ese tiempo se adquieran los fondos suficientes para realizar el pago.

Un buen método para llevar unas finanzas óptimas es que cada que se realiza un cargo a la Tarjeta de Crédito esta debe separarse de sus recursos de su tarjeta de débito o efectivo para que una vez llegando la fecha límite se pueda cubrir el pago de la tarjeta.

Se tiene la creencia de que los intereses solo se aplican al saldo insoluto, es decir, el saldo que no se ha pagado, por ejemplo: si el pago requerido es de $4,800 y solo se le abonan $4,200, el error es creer que solo se pagará intereses sobre los $600 restantes, sin embargo, este planteamiento no es correcto, y este, junto al error de solo pagar el saldo mínimo es lo que en la actualidad tiene a ocho de cada 10 mexicanos con deudas incosteables.

Para evitar que usted sea víctima de esto, mantenga un buen historial crediticio y no afecte sus estrategias financieras, le facilitamos el método que las instituciones bancarias emplean para calcular el interés – que, por cierto, la tasa de interés en México ronda entre el 24.5 y 63.5 – de sus tarjetas de crédito.

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
Se desea conocer el interés a pagar del siguiente estado de cuenta de una tarjeta de crédito (El Financiero, 2017):


Tu Banco

ESTADO DE CUENTA MENSUAL
Centro de Atención Telefónica
Ciudad de México:1-444-555 (T-banco)
tubanco.com.mx

RFC
No. de Cuenta:
NO. de Cliente:

Tarjeta de Crédito ORO

TOMÁS P. RODRÍGUEZ
CALLE ANTONIO VÁZQUEZ 893
ROMA SUR 04320 CUAUHTÉMOC

Pago mínimo	$300.00
Fecha Límite de Pago	15-Dic-2013
Pago para NO generar intereses	$2,773.74
Saldo actual al corte	$2,773.74
Costo Anual Total	10.90%
Tasa de interés anual ordinaria	36%
Tasa de interés mensual ordinaria	3% 8

Resumen de la Cuenta

Estado de Cuenta Mensual del 27 de Oct al 26 de Nov, periodo de 31 días. 7

	Límite de Crédito	$4,000.00
1	Fecha de corte	26/NOV/13
3	Días del periodo	31
9	Saldo Promedio Diario	$2,466.77

2	Saldo Anterior	$1,700.00	
+	Compras y otros cargos[1]	$1,244.70	
+	Intereses del periodo	$74.00	10
+	IVA del periodo 16%	$55.04	11
-	Pagos y Depósitos	$300.00	
	Saldo del periodo	$2,773.74	

Detalle de Operaciones

Fecha	Concepto	Otras Divisas / Pesos	
Oct 28	COMISIÓN MEMBRESÍA ANUAL	$270.00	6
Nov 10	COMPRA	$974.70	4
Nov 24	SU ABONO_GRACIAS	$300.00	5

1 Las comisiones del periodo están incluidas en "Compras y otros cargos".

Los números que se muestran en el estado de cuenta anterior se describen a continuación:

1. Fecha de corte. Día del mes en que termina el periodo de facturación de una tarjeta de crédito.
2. Saldo anterior. Cantidad en pesos que comprende impuestos, intereses, comisiones y capital, derivados de las disposiciones del crédito vigentes.
3. Días del periodo. Número de días que conforma el periodo.
4. Compras efectuadas (por fecha y cantidad).
5. Pagos realizados (por fecha y cantidad).
6. Comisiones cargadas (por fecha y cantidad).
7. Los días que conforman al periodo (día y mes).
8. La tasa de interés mensual.
9. El saldo promedio diario.
10. Intereses del periodo.

11. IVA del periodo.

Primeramente, se elabora una tabla donde se desglosen el saldo anterior (2), así como las compras y comisiones pagadas durante el periodo, y los abonos o pagos realizados (5).

	Fecha (7)	Días transcurridos en el periodo*	Compras y comisiones	Pagos abonos	Saldo diario	
1	26 oct	0	0	0	$1,700.00	2
	27 oct	1	0	0	$1,700.00	
	28 oct	2	6 $270	0	$1,970.00	
	29 oct	3	0	0	$1,970.00	
	30 oct	4	0	0	$1,970.00	
	31 oct	5	0	0	$1,970.00	
	01 nov	6	0	0	$1,970.00	
	02 nov	7	0	0	$1,970.00	
	03 nov	8	0	0	$1,970.00	
	04 nov	9	0	0	$1,970.00	
	05 nov	10	0	0	$1,970.00	
	06 nov	11	0	0	$1,970.00	
	07 nov	12	0	0	$1,970.00	
	08 nov	13	0	0	$1,970.00	
	09 nov	14	0	0	$1,970.00	
	10 nov	15	4 $974.70		$2,944.70	
	11 nov	16	0	0	$2,944.70	
	12 nov	17	0	0	$2,944.70	
	13 nov	18	0	0	$2,944.70	
	14 nov	19	0	0	$2,944.70	
	15 nov	20	0	0	$2,944.70	
	16 nov	21	0	0	$2,944.70	
	17 nov	22	0	0	$2,944.70	
	18 nov	23	0	0	$2,944.70	
	19 nov	24	0	0	$2,944.70	
	20 nov	25	0	0	$2,944.70	
	21 nov	26	0	0	$2,944.70	
	22 nov	27	0	0	$2,944.70	
	23 nov	28	0	0	$2,944.70	
	24 nov	29	0	5 $300	$2,644.70	
	25 nov	30	0	0	$2,644.70	
	26 nov	31	0	0	$2,644.70	
		3		Suma	$76,469.90	

Fuente: CONDUSEF

El saldo anterior (2) es de $1,700 y se debe incluir en el cálculo del Saldo Promedio Diario, el cual se obtiene sumando el saldo diario, el cual da un total de $76,469.90 y este se divide entre el número de días del periodo (3), es decir, 31.

$$\frac{76{,}469.90}{31} = \$2{,}466.77$$

De modo que, el saldo promedio es $2,466.77.

Ahora se procede a emplear el saldo promedio diario multiplicado por la tasa de interés mensual ordinaria (8), el cual es de 3% (equivalente al 36% anual).

$$(2{,}466.77)(0.03) = 74$$

De modo que, los intereses del periodo corresponden a $74.00.

Finalmente, para calcular los impuestos de la tarjeta de crédito estos van sobre el interés de $74.00 que se calculó anteriormente y la comisión de membresía anual (6) de $270.

$$74.00 + 270.00 = 344.00$$

A esto lo multiplicamos por el 16% correspondiente al Impuesto al Valor Agregado (IVA):

$$(344.00)(0.16) = 55.04$$

De modo que, los impuestos corresponden a $55.04

El pago para no generar intereses se obtiene sumando el saldo anterior, las compras y cargos, intereses, impuestos y se le resta los pagos realizados.

$$\$1{,}700 + \$1{,}244.70 + \$74.00 + \$55.04 - \$300.00 = \$2{,}773.74$$

Solicite a sus alumnos resolver el siguiente ejercicio:

1. Consiga dos estados de cuenta de tarjeta de crédito (puede ser propia o de algún conocido), identifique los elementos para el cálculo del interés y calcule los intereses de esta, así como el pago para no generar intereses.

Sesión 4.14. Análisis de Inversiones

La aceptación o rechazo de un proyecto de inversión representa la decisión más importante que pudieran tomar los administradores financieros porque compromete los recursos en el largo plazo que pudieran afectar las operaciones de la empresa. La evaluación de las inversiones se llevan a cabo por dos elementos: el Valor Presente Neto (VPN) y la Tasa Interna de Rendimiento (Daniel Chichil, 2008).

El VPN es calculado mediante:

$$VPN = F_1(1+i)^{-1} + F_1(1+i)^{-2} + \cdots + F_n(1+i)^{-n} - I_0$$

$$VPN = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} - I_o$$

Donde F_t es el flujo de efectivo esperado en el proyecto de inversión por un tiempo t; i es la tasa interna de rendimiento; I_o es la inversión inicial del proyecto; y n es el número de periodos de tiempo.

El criterio para decidir la elección del proyecto es:

Si $VPN \geq 0$	Aceptar el proyecto
Si $VPN < 0$	No aceptar el proyecto

Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
Una empresa debe decidir entre dos proyectos: uno en el que debe desembolsar $4, 500,000 y otros en el que debe desembolsar $8, 000,000. Para ambos se utilizaría un financiamiento de 25% anual. Los flujos efectivos anuales esperados son los siguientes:

Periodo (años)	Proyecto A	Proyecto B
0	-$4,500,000	-$8,000,000
1	$1,900,000	$900,000
2	$2,600,000	$1,100,000
3	$2,900,000	$1,500,000
4	$2,700,000	$2,000,000
5	$2,900,000	$2,200,000

Primero, se comienza analizando el VPN del proyecto A:

$$VPN = 1{,}900{,}000(1+0.25)^{-1} + 2{,}600{,}000(1+0.25)^{-2} + 2{,}900{,}000(1+0.25)^{-3} + 2{,}000{,}000(1+0.25)^{-4} + 2{,}200{,}000(1+0.25)^{-5} - 4{,}500{,}000$$

$$VPN = 1{,}520{,}000 + 1{,}664{,}000 + 1{,}484{,}800 + 1{,}105{,}920 + 950{,}272 - 4{,}500{,}000$$

$$VPN = \$2{,}224{,}992$$

Al ser un resultado positivo quiere decir que el proyecto A es aceptable.

Ahora se procede al proyecto B.

$$VPN = 900{,}000(1+0.25)^{-1} + 1{,}100{,}000(1+0.25)^{-2} + 1{,}500{,}000(1+0.25)^{-3} + 2{,}700{,}000(1+0.25)^{-4} + 2{,}900{,}000(1+0.25)^{-5} - 8{,}000{,}000$$

$$VPN = 720{,}000 + 704{,}000 + 768{,}000 + 819{,}200 + 720{,}896 - 8{,}000{,}000$$

$$VPN = -\$4{,}267{,}904$$

Al ser en este caso negativo el resultado, el proyecto B no es aceptable.

La TIR es la tasa de rendimiento que la empresa espera obtener si decide llevar a cabo el proyecto

El método que se emplea para determinar la TIR de los proyectos es el método de interpolación lineal, el cual fue descrito anteriormente en el bloque II. Para mayor facilidad se le vuelve a compartir la fórmula para realizar el cálculo de la Interpolación Lineal:

$$i = \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1}{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1}(X - \mathrm{X}_1)$$

De manera gráfica la TIR es localizada en la intersección con el Eje X

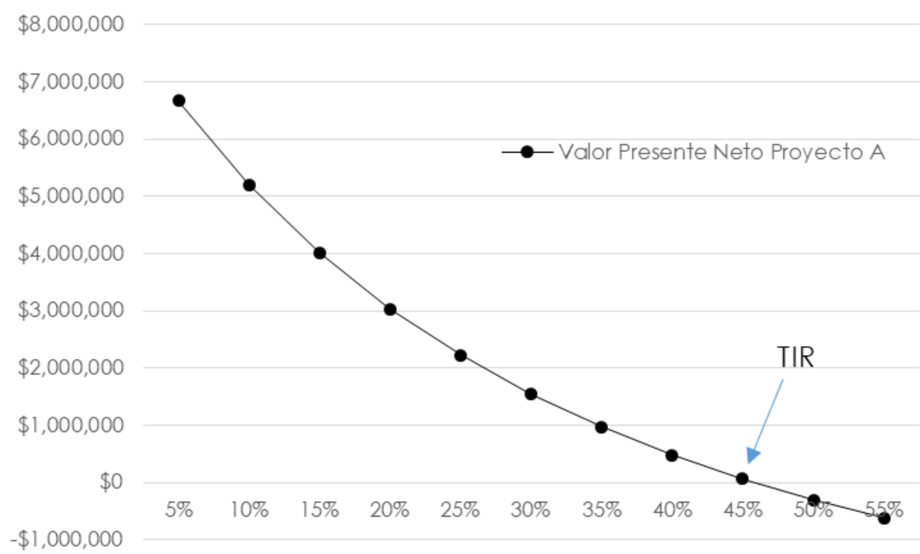
Comparta con sus alumnos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
Obtenga la TIR del proyecto A del ejemplo anterior.

Primero es necesario calcular el VPN a las tasas referencia que se muestran en la siguiente tabla:

Tasa de Rendimiento	Valor Presente Neto Proyecto A
5%	$6,666,452
10%	$5,199,654
15%	$4,010,491
20%	$3,034,658
25%	$2,224,992
30%	$1,546,381
35%	$972,325
40%	$482,567
45%	$61,443
50%	-$303,292
55%	-$621,309

De manera gráfica se obtuvo:



El grafico anterior muestra que la TIR se encuentra entre 45% y 50%.

Variables	$i\%$	Variables	VPN
$\mathcal{R}_1$	45%	X_1	$61,443
		X	-$120,924.50
$\mathcal{R}_2$	50%	X_2	-$303,292

Una vez completados los datos de la tabla anterior se procede a sustituirlos en la fórmula de interpolación lineal:

$$\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1}{\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1}(X - \mathrm{X}_1) = (0.45) + \frac{0.50 - 0.45}{-303{,}292 - 61{,}443}(-\$120{,}924.50 - \$61{,}443)$$

$$= (0.45) + \frac{0.50 - 0.45}{-303{,}292 - 61{,}443}(-\$120{,}924.50 - \$61{,}443)$$

$$i = 0.45 + 0.025 = 47.5$$

De modo que la TIR es de 47.5%

Comparta con sus alumnos el siguiente ejercicio:

1. Calcule el VPN y la TIR de una inversión de una empresa por $35,000,000 con una tasa anual del 18% y el siguiente flujo de efectivo neto:

Fuentes de consulta

Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California Sur. (2008). *Matemáticas Financieras I.* La Paz, Baja California Sur: Colegio de Bachilleres del Estado de Baja California Sur.

Colegio Nacional de Matemáticas. (2009). *Matemáticas Simplificadas.* Ciudad de México: Pearson Educación.

Daniel Chichil, Y. (2008). Matemáticas Financieras para el crédito, el ahorro y la inversión. Ciudad de México: Universidad Autónoma Metropolitana.

El Financiero. (24 de octubre de 2017). Ésta es la fórmula para calcular bien los intereses de tu tarjeta de crédito. Obtenido de https://www.elfinanciero.com.mx/mis-finanzas/esta-es-la-formula-para-calcular-bien-los-intereses-de-tu-tarjeta-de-credito

Gutiérrez Jiménez, Gerardo (2021). Apuntes de matemáticas financieras en http://csh.izt.uam.mx/cursos/gerardo/uam/matefin/porcentajes.pdf

Mena Rómulo y Escobar Tania (2017). Unidad Didáctica. Matemática Financiera 1. Universidad Central del Ecuador.
Pedrosa, Jorge (2021). *Interés compuesto*. https://economipedia.com/definiciones/interes-compuesto.html

Pompa Osorio, María y Arévalo Guerrero, Eduardo (2005). Apuntes para la asignatura de matemáticas financiera. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Ramírez Molinares, C., Garcia Barroza, M., Pantoja Algarin, C., & Zambrano Meza, A. (2009). *Fundamentos de Matemáticas Financieras.* Cartagena, Colombia: Universidad Libre Sede Cartagena.

Usuario financiero (2021) *Fórmula para calcular interés y monto compuesto*. https://usuariofinanciero.bcu.gub.uy/Paginas/Tasas_Formula2.aspx#:~:text=De%20aplicar%20la%20f%C3%B3rmula%20M,durante%205%20a%C3%B1os%20al%204%25.

Glosario

Acreedor: es una persona, física o jurídica que ha entregado un crédito o un bien material a otra persona (deudor) y espera recibir un pago a cambio.

Amortización: la amortización de una obligación o deuda se define como el proceso mediante el cual se paga la misma junto con sus intereses, en una serie de pagos y en un tiempo determinado.

Anualidad: es una serie de retiros, depósitos o pagos que se efectúan de forma regular, ya sea en periodos anuales, mensuales, trimestrales, semestrales o de otro tipo.

Crédito: término utilizado en el comercio y finanzas para referirse a las transacciones que implican una transferencia de dinero que debe devolverse transcurrido cierto tiempo.

Descuento: es la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro equivalente con vencimiento actual, mediante la aplicación de una ley financiera de descuento simple.

Dinero: es un medio de intercambio, por lo general en forma de billetes y monedas, que es aceptado por una sociedad para el pago de bienes, servicios y todo tipo de obligaciones.

Interés: el interés es el rédito que hay que pagar por el uso del dinero tomado en préstamo. El rédito que se conviene en pagar por una suma determinada de dinero depende de la cuantía de la suma prestada, de la duración de la deuda y de la tasa, tanto por ciento o tipo de interés.

Interés compuesto: es la operación financiera en la cual el capital aumenta al final de cada periodo por la suma de los intereses vencidos. La suma total obtenida al final se conoce con el nombre de monto compuesto o valor futuro. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le denomina interés compuesto.

Interés simple: es una fórmula financiera que permite calcular el rédito que genera un capital a una tasa de interés en un periodo de tiempo. Es una ley que se utiliza comúnmente en el corto plazo (periodos menores de 1 año).

Periodo de gracia: es el período entre el final de un periodo de cuenta y la fecha en que usted debe hacer su pago. Durante dicho período no se cobran intereses siempre que usted pague su saldo en su totalidad hasta la fecha de pago.

Poder adquisitivo: es la capacidad económica que se tiene para obtener recursos disponibles, es decir, con que cuenta una persona para satisfacer sus necesidades y sus deseos, teniendo en cuenta sus ingresos y su patrimonio.

Sucesiones aritméticas: es una secuencia ordenada de números llamados términos, de modo que, cada término se calcula sumando (o restando) un número (llamado diferencia común) al término anterior.

Sucesiones geométricas: es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad fija, llamada razón r.

Tabla de amortización: es el plan de pago de deuda al obtener un crédito.

Tabla de días: para realizar los cálculos de manera correcta es necesario conocer el manejo de la tabla de días, para determinar en forma exacta los días que transcurren entre una fecha y otra, lo cual, es importante para el interés bancario y el racional.

Tanto por ciento: o porcentaje es la fracción de un número entero expresada en centésimas; pues representa fracciones cuyo denominador es 100. Así, 20 por ciento significa 20/100. Normalmente se representa con el símbolo %.

Tasa: la tasa, tanto por ciento o tipo de interés es el número de unidades pagadas como rédito en la unidad de tiempo, por cada cien unidades de la suma prestada.

Tasa de interés: es el porcentaje a pagar por utilizar una cantidad de dinero durante un tiempo determinado.